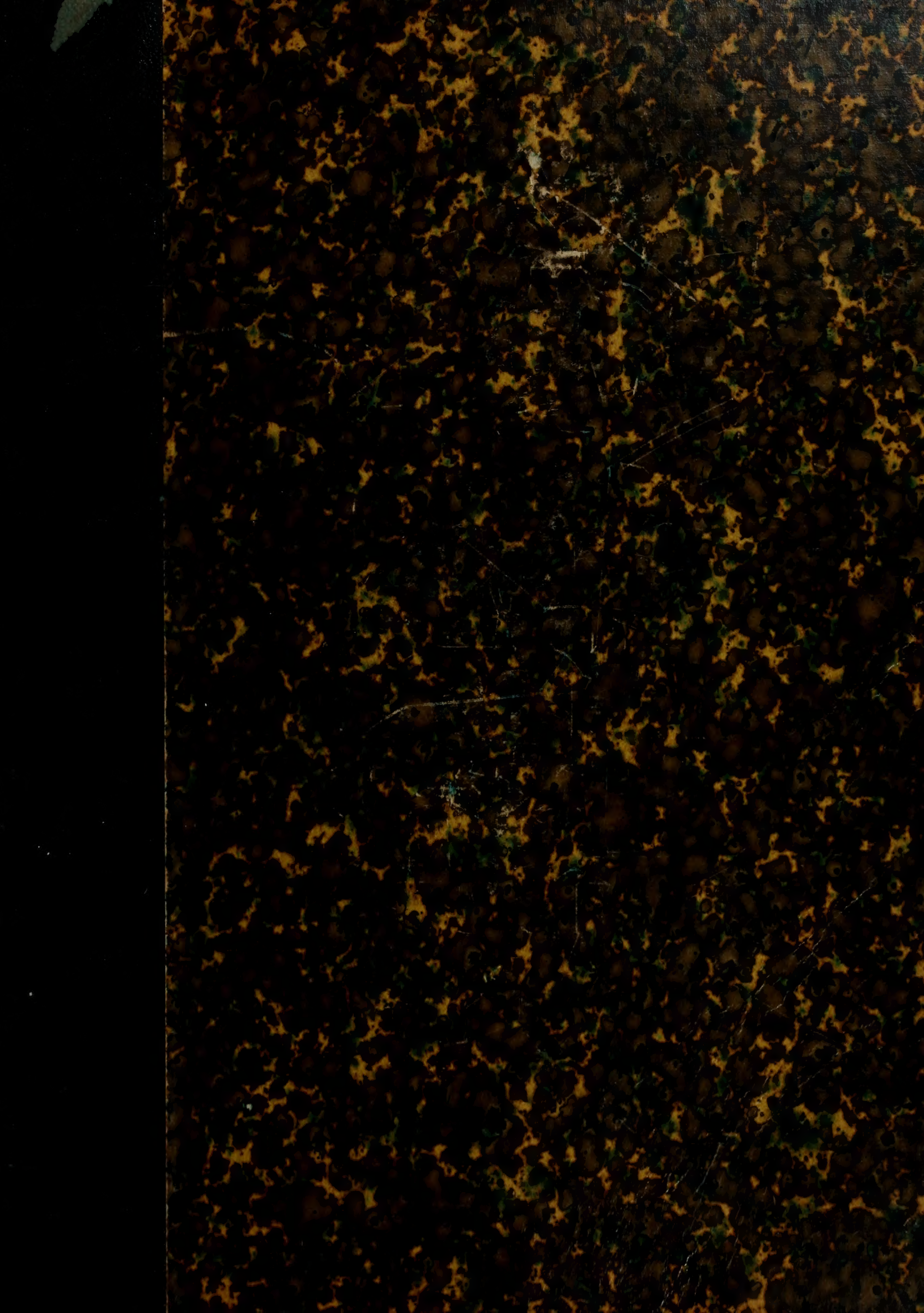
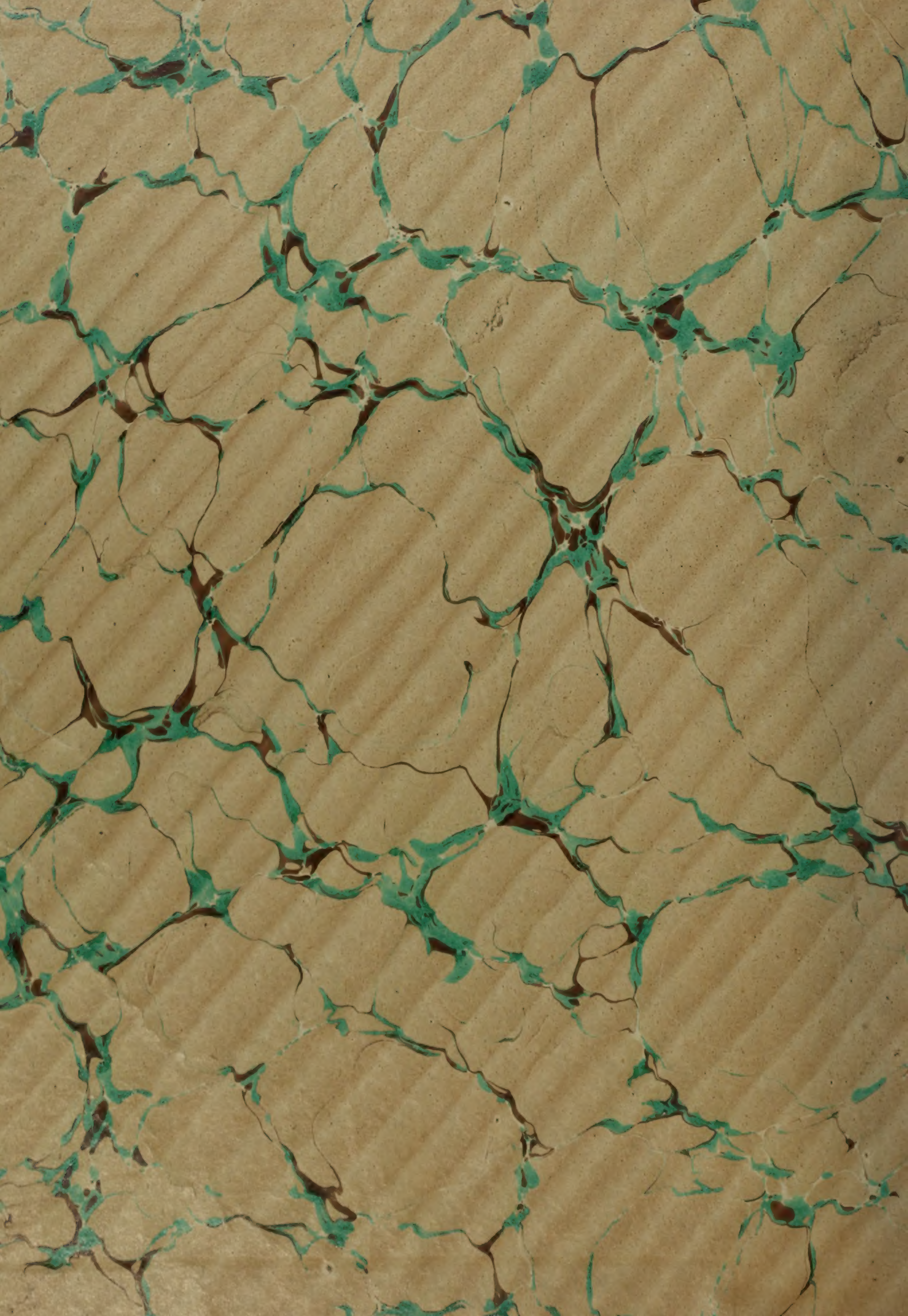






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

QUATRIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HALPHEN, E. LAGUERRE, M. LÉVY, A. MANNHEIM, É. PICARD, H. RESAL.

TOME TROISIÈME. — ANNÉE 1887.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1887

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation $\Delta F = 0$;

Par M. APPELL.

Soit $F(x, y, z)$ une fonction de trois variables réelles x, y, z que nous considérons comme les coordonnées rectilignes rectangulaires d'un point M; supposons que cette fonction vérifie l'équation

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

et admette par rapport à x la période 2α, c'est-à-dire remplisse la condition

$$F(x + 2\alpha, y, z) = F(x, y, z).$$

Il résulte du développement en série de Fourier que, si cette fonc-

tion est régulière en tous les points de l'espace situés à l'intérieur d'un cylindre parallèle à l'axe des coordonnées x, elle est, ainsi que toutes ses dérivées partielles, développable en une série trigonométrique de la forme

$$F(x, y, z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left(A_\nu \cos \frac{\nu\pi x}{\alpha} + B_\nu \sin \frac{\nu\pi x}{\alpha} \right),$$

convergente en tous les points de l'intérieur du cylindre : les coefficients A_ν et B_ν sont des fonctions de y et z vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{\nu^2\pi^2}{\alpha^2} V = 0.$$

Si la fonction $F(x, y, z)$ admet la période 2α par rapport à x et la période 2β par rapport à y,

$$F(x + 2\alpha, y, z) = F(x, y + 2\beta, z) = F(x, y, z);$$

et, si elle est régulière en tous les points de l'espace situés entre deux plans parallèles au plan xOy, cette fonction, ainsi que ses dérivées, est développable en une double série de la forme

$$F(x, y, z) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} \left(A_{\mu,\nu} \cos \frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos \frac{\nu\pi y}{\beta} + B_{\mu,\nu} \cos \frac{\mu\pi x}{\alpha} \sin \frac{\nu\pi y}{\beta} \right.$$
$$\left. + C_{\mu,\nu} \sin \frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos \frac{\nu\pi y}{\beta} + D_{\mu,\nu} \sin \frac{\mu\pi x}{\alpha} \sin \frac{\nu\pi y}{\beta} \right),$$

convergente en tous les points considérés; les coefficients $A_{\mu,\nu}$, $B_{\mu,\nu}$, $C_{\mu,\nu}$, $D_{\mu,\nu}$ sont des fonctions de z vérifiant l'équation différentielle

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - \pi^2 \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2} \right) U = 0.$$

Je me suis proposé d'appliquer ces propositions générales, qui sont bien connues, aux fonctions les plus simples satisfaisant aux conditions précédentes. De même que, dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, les fonctions périodiques les plus simples, après les fonctions périodiques holomorphes, sont celles qui admettent une infi-

nité de pôles distribués régulièrement dans le plan comme $\cot z$ ou $\operatorname{sn} z$; dans la théorie des fonctions de trois variables x, y, z vérifiant l'équation $\Delta F = 0$, les fonctions périodiques les plus simples, après les fonctions périodiques régulières en tous les points à distance finie, sont celles qui admettent une infinité de pôles distribués régulièrement dans l'espace, le mot *pôle* étant employé ici dans le sens que nous lui avons donné précédemment (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 5 février 1883, et *Acta Mathematica*, t. IV, p. 313). Ces fonctions périodiques se présentent dans la résolution de différentes questions de Physique mathématique, ainsi qu'il résulte d'une remarque de Riemann [1], de plusieurs Notes présentées à l'Académie des Sciences par MM. Boussinesq [2], de Saint-Venant, Flamant [3] et Chervet [4]; ces applications, avec quelques autres que j'ai eu l'honneur d'indiquer dans une Note présentée à l'Académie le 28 janvier 1884, se trouvent résumées dans un Mémoire *Sur quelques applications de la fonction $Z(x, y, z)$ à la Physique mathématique*, publié dans les *Acta mathematica*, t. VIII, p. 265.

Les développements en séries trigonométriques obtenus dans le présent Mémoire se prêtent facilement au calcul numérique. Comme on le verra, ces développements présentent une analogie intéressante avec ceux des fonctions simplement et doublement périodiques et, en particulier, des fonctions

$$\log \sin(x+yi) \sin(x-yi),$$
$$\log \theta(x+yi)\, \theta(x-yi)$$

qui satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Les principaux résultats contenus dans ce Mémoire ont été indiqués dans une Note présentée à l'Académie le 21 juin 1886.

---

(1) *Schwere, Electricität und Magnetismus*, bearbeitet von Hattendorff, p. 84.

(2) 3, 31 janvier, 30 mai 1870.

(3) 3, 10, 24 avril 1882; 12, 19 novembre 1883.

(4) 24 septembre 1883; 11 février 1884.

1. Soit $\mathfrak{S}_1(x, y, z; a)$ la fonction définie par la série

$$(1)\quad \mathfrak{S}_1(x, y, z; a) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \sum{}' \left[\frac{1}{\sqrt{(x-ma)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{m^2 a^2}} \right],$$

où tous les radicaux sont pris positivement, la sommation désignée par $\sum'$ s'étendant à toutes les valeurs entières de m positives et négatives, zéro excepté.

Cette fonction $\mathfrak{S}_1$ satisfait à l'équation différentielle

$$\Delta \mathfrak{S}_1 = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{S}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{S}_1}{\partial z^2} = 0;$$

elle est finie et continue, ainsi que toutes ses dérivées, en tous les points de l'espace, à l'exception des points ayant pour coordonnées

$$(2)\qquad x = ma, \qquad y = 0, \qquad z = 0$$

m prenant toutes les valeurs entières, zéro compris; enfin elle ne change pas quand on augmente x de la constante a :

$$\mathfrak{S}_1(x+a, y, z; a) = \mathfrak{S}_1(x, y, z; a).$$

Cette dernière propriété résulte immédiatement de ce que la différence

$$\mathfrak{S}_1(x+a, y, z) - \mathfrak{S}_1(x, y, z)$$

peut s'écrire

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{[x-(m-1)a]^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-ma)^2+y^2+z^2}} \right],$$

série dont la somme est évidemment nulle, puisque les termes se détruisent deux à deux.

En employant la terminologie que nous avons introduite dans un Mémoire *Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation différentielle* $\Delta F = 0$ (*Acta mathematica*, t. IV, p. 313), nous dirons que cette fonction $\mathfrak{S}_1$ est régulière en tous les points à distance finie, à l'exception des points (2), qui sont des pôles de ré-

sidu $+1$, qu'elle a un point singulier essentiel à l'infini, et qu'elle admet le groupe de périodes $(a, 0, 0)$.

J'ajoute qu'à l'aide de cette fonction on peut exprimer le *potentiel d'une masse liquide limitée par deux plans parallèles* et traversée par un flux d'électricité à l'état permanent, comme il résulte d'une Note présentée à l'Académie des Sciences, dans la séance du 24 septembre 1883, par M. A. Chervet.

En tous les points de l'espace autres que les points de l'axe Ox, cette fonction $\mathfrak{S}_1$ et toutes ses dérivées pourront être développées en séries trigonométriques procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi x}{a}$. En particulier, on aura, en tous ces points,

$$\mathfrak{S}_1(x, y, z; a) = A_0 + A_1 \cos\frac{2\pi x}{a} + \ldots + A_\nu \cos\frac{2\nu\pi x}{a} + \ldots,$$

développement qui ne contient que des cosinus, car la fonction $\mathfrak{S}_1$ est *paire* en x.

Les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_\nu$ de ce développement sont des fonctions de y et z que nous allons déterminer.

En posant, pour simplifier,

$$(3)\qquad y^2 + z^2 = u,$$

on a

$$(4)\qquad \mathfrak{S}_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+u}} + \sum{}' \left[\frac{1}{\sqrt{(x-ma)^2+u}} - \frac{1}{\sqrt{m^2a^2}}\right],$$

ce qui montre que les coefficients cherchés $A_0, A_1, \ldots, A_\nu$ dépendent uniquement de u et de a. Au lieu de calculer directement ces coefficients, il est plus simple de déterminer leurs dérivées, par rapport à u,

$$\frac{dA_0}{du}, \quad \frac{dA_1}{du}, \quad \ldots, \quad \frac{dA_\nu}{du}.$$

En différentiant les développements précédents par rapport à u, on obtient

$$(5)\qquad \frac{d\mathfrak{S}_1}{du} = \frac{dA_0}{du} + \frac{dA_1}{du}\cos\frac{2\pi x}{a} + \ldots + \frac{dA_\nu}{du}\cos\frac{2\nu\pi x}{a} + \ldots,$$

puis, d'après (4),

$$\frac{d\Sigma_1}{du} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x^2+u)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}\sum{}' \frac{1}{[(x-ma)^2+u]^{\frac{3}{2}}},$$

ou, plus simplement,

$$(6)\qquad \frac{d\Sigma_1}{du} = -\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{[(x-ma)^2+u]^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour calculer les coefficients $\frac{d\Sigma_\nu}{du}$, nous emploierons une transformation indiquée par Riemann (*Schwere Electricität und Magnetismus*, bearbeitet von Hattendorff, p. 88), qui nous a été signalée par Mme de Kowaleski.

Soit N une quantité positive, l'équation

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

donne

$$\int_0^{\infty} \sqrt{s}\,.\,e^{-s}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ou, en posant $s = Nt$,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \sqrt{t}\,.\,e^{-Nt}\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc, en faisant

$$N = (x-ma)^2 + u,$$

on a

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{[(x-ma)^2+u]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \sqrt{t}\,e^{-[(x-ma)^2+u]t}\,dt,$$

et, d'après (6),

$$(7)\qquad \frac{d\Sigma_1}{du} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \sqrt{t}\,.\,e^{-(u+x^2)t} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{2mtax - m^2ta^2}\,dt.$$

Or, si l'on fait, en suivant les notations de MM. Briot et Bouquet

dans leur *Théorie des fonctions elliptiques*,

$$\theta_3(x, \omega, \omega') = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(2mx+m^2\omega')},$$

on voit, en posant

$$\omega = \frac{\pi i}{at}, \qquad \omega' = -a,$$

que la série qui figure sous le signe $\int$ dans la formule (7) est

$$\theta_3\left(x, \frac{\pi i}{at}, -a\right).$$

On peut donc écrire

$$(8) \qquad \frac{d\Xi_1}{du} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{t}\,.\,e^{-t(u+x^2)}\,\theta_3\left(x, \frac{\pi i}{at}, -a\right)dt.$$

Si, d'autre part, on fait

$$p = e^{-\frac{\pi\omega i}{\omega'}} = e^{-\frac{\pi^2}{a^2 t}}$$

et

$$\mathfrak{S}_3(x) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} p^{\nu^2}\cos\frac{2\nu\pi x}{a},$$

on sait que l'on a (Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 320)

$$\mathfrak{S}_3(x) = \sqrt{\frac{\omega'}{\omega i}}\,e^{\frac{\pi x^2 i}{\omega\omega'}}\,\theta_3(x, \omega, \omega'),$$

c'est-à-dire, dans le cas actuel,

$$\mathfrak{S}_3(x) = a\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-tx^2}\,\theta_3\left(x, \frac{\pi i}{at}, -a\right);$$

d'où

$$e^{-tx^2}\,\theta_3\left(x, \frac{\pi i}{at}, -a\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\,\mathfrak{S}_3(x).$$

Substituant dans l'équation (8), on obtient

$$\frac{d\Theta_1}{du} = -\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-tu}\,\Im_3(x)\,dt.$$

Enfin, en mettant, pour $\Im_3(x)$, son développement en série trigonométrique

$$\Im_3(x) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2 t}} \cos\frac{2\nu\pi x}{a},$$

on obtient

$$\frac{d\Theta_1}{du} = -\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-tu}\,dt - \frac{2}{a}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\int_0^\infty e^{-tu-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2 t}}\,dt\cos\frac{2\nu\pi x}{a}.$$

On a ainsi le développement de $\frac{d\Theta_1}{du}$ en série trigonométrique. Les coefficients

$$\frac{dA_0}{du},\quad \frac{dA_1}{du},\quad \ldots,\quad \frac{dA_\nu}{du}$$

de ce développement sont

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{dA_0}{du} = -\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^\infty e^{-tu}\,dt = -\dfrac{1}{au}, \\[2ex] \dfrac{dA_\nu}{du} = -\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^\infty e^{-tu-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2 t}}\,dt. \end{cases}$$

En intégrant ces expressions par rapport à u, on a

$$(10)\qquad \begin{cases} A_0 = -\dfrac{1}{a}\log u + B_0, \\[2ex] A_\nu = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^\infty e^{-tu-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2 t}}\,\dfrac{dt}{t} + B_\nu, \end{cases}$$

où B_0 et B_ν sont des constantes indépendantes de u. Nous allons montrer que toutes ces constantes B_ν sont *nulles*, sauf B_0 qui est

égale à

$$\frac{2}{a}(\log 2a - C),$$

C désignant la constante d'Euler 0,577215....

La fonction

$$\Theta_1 = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu \cos\frac{2\nu\pi x}{a}$$

vérifie l'équation $\Delta\Theta_1 = 0$; or, A_ν étant une fonction de $u = y^2 + z^2$, on a

$$\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial x^2} = -\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{4\nu^2\pi^2}{a^2} A_\nu \cos\frac{2\nu\pi x}{a},$$

$$\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial y^2} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left(2\frac{dA_\nu}{du} + 4y^2\frac{d^2A_\nu}{du^2}\right)\cos\frac{2\nu\pi x}{a},$$

$$\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial z^2} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left(2\frac{dA_\nu}{du} + 4z^2\frac{d^2A_\nu}{du^2}\right)\cos\frac{2\nu\pi x}{a};$$

la somme de ces dérivées étant *nulle*, on doit avoir

(11) $$u\frac{d^2A_\nu}{du^2} + \frac{dA_\nu}{du} - \frac{\nu^2\pi^2}{a^2}A_\nu = 0.$$

On vérifie sans peine que l'intégrale définie

$$I_\nu = \frac{2}{a}\int_0^\infty e^{-tu-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2t}}\frac{dt}{t}$$

est une intégrale particulière de l'équation différentielle (11), c'est-à-dire que l'on a

(12) $$u\frac{d^2I_\nu}{du^2} + \frac{dI_\nu}{du} - \frac{\nu^2\pi^2}{a^2}I_\nu = 0.$$

D'après les valeurs (10) trouvées pour les coefficients A_ν, on aurait

$$A_\nu = I_\nu + B_\nu,$$

B_ν étant indépendant de u. En substituant cette valeur de A_ν dans l'é-

quation (11) et tenant compte de l'équation (12), on trouve

$$\frac{\nu^2\pi^2}{a^2}B_\nu = 0,$$

ce qui donne $B_\nu = 0$ pour toutes les valeurs de ν autres que zéro. Pour vérifier la relation (12), il suffit de partir de l'identité

$$d\left(te^{-tu-\frac{\nu^2\pi^2}{a^2t}}\right) = e^{-tu-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2t}}\left(1 - tu + \frac{\pi^2\nu^2}{a^2t}\right)dt,$$

et d'intégrer les deux membres entre les limites o et ∞, en remarquant que l'intégrale du premier membre s'annule aux limites.

Il nous reste donc à déterminer B_0. Pour cela, nous calculerons directement le premier coefficient A_0 du développement de $\mathfrak{S}_1$.

La formule

$$\mathfrak{S}_1 = A_0 + A_1\cos\frac{2\pi x}{a} + \ldots + A_\nu\cos\frac{2\nu\pi x}{a} + \ldots$$

donne, en effet, d'après Fourier,

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a \mathfrak{S}_1\,dx.$$

Prenons, dans la série (1) qui définit $\mathfrak{S}_1$, les termes correspondant aux valeurs de m comprises entre $-k$ et $+k$, k étant un entier positif; et soit

$$S_k = \frac{1}{\sqrt{x^2+u}} + \sum_{m=1}^{m=k}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-ma)^2+u}} + \frac{1}{\sqrt{(x+ma)^2+u}} - \frac{2}{ma}\right]$$

la somme ainsi obtenue : cette somme tendra vers $\mathfrak{S}_1$ quand on fera augmenter k indéfiniment.

Or on a

$$\begin{aligned}\int_0^a S_k\,dx = \log\frac{a+\sqrt{a^2+u}}{\sqrt{u}} &+ \sum_{m=1}^{m=k}\left[\log\frac{(1-m)a+\sqrt{(1-m)^2a^2+u}}{-ma+\sqrt{m^2a^2+u}}\right.\\ &\left.+\log\frac{(1+m)a+\sqrt{(1+m)^2a^2+u}}{ma+\sqrt{m^2a^2+u}} - \frac{2}{m}\right].\end{aligned}$$

Si, dans le second membre, on remplace la somme des logarithmes par le logarithme du produit, on voit que les mêmes facteurs, sauf deux, se retrouvent au numérateur et au dénominateur, et l'on obtient

$$\int_0^a S_k\,dx = \log\frac{(k+1)a+\sqrt{(k+1)^2a^2+u}}{-ka+\sqrt{k^2a^2+u}} - 2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right).$$

Comme l'on a

$$\frac{1}{-ka+\sqrt{k^2a^2+u}} = \frac{ka+\sqrt{k^2a^2+u}}{u},$$

on peut écrire, en ajoutant et retranchant $2\log k$,

$$\int_0^a S_k\,dx = \log\frac{\left[(k+1)a+\sqrt{(k+1)^2a^2+u}\right]\left(ka+\sqrt{k^2a^2+u}\right)}{k^2u}$$
$$-2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}-\log k\right).$$

Si k augmente indéfiniment, S_k tend vers $\mathfrak{S}_1$, et l'on a

$$\int_0^a \mathfrak{S}_1\,dx = \log\frac{4a^2}{u} - 2C,$$

C désignant la constante d'Euler,

$$C = \lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}-\log k\right)$$

pour k infini : cette constante, que Gauss désigne par $-\Psi(0)$, a pour valeur, d'après Gauss (*Werke*, III Band, p. 154),

$$C = -\Psi(0) = 0{,}5772156\ldots;$$

donc, enfin,

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a \mathfrak{S}_1\,dx = -\frac{1}{a}\log u + \frac{2}{a}(\log 2a - C).$$

En résumé, si l'on fait

$$\mathfrak{S}_1(x,y,z;a) = A_0 + A_1\cos\frac{2\pi x}{a} + \ldots + A_\nu\cos\frac{2\nu\pi x}{a} + \ldots,$$

les coefficients ont pour valeurs

$$(13)\qquad \begin{cases} A_0 = -\frac{1}{a}\log u + \frac{2}{a}(\log 2a - C), \\ A_\nu = \frac{2}{a}\int_0^\infty e^{-tu - \frac{\pi^2\nu^2}{a^2 t}}\frac{dt}{t}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \infty), \end{cases}$$

u désignant la quantité $y^2 + z^2$.

2. En remplaçant t par une nouvelle variable τ liée à t par la relation

$$t = \frac{\pi\nu}{a\sqrt{u}}\tau,$$

il vient

$$A_\nu = \frac{2}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{\pi\nu\sqrt{u}}{a}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)}\frac{d\tau}{\tau};$$

si donc on désigne par $f(\varepsilon)$ l'intégrale définie suivante, qui dépend du seul paramètre ε supposé positif,

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\varepsilon\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)}\frac{d\tau}{\tau},$$

on pourra écrire

$$(13')\qquad A_\nu = \frac{4}{a}f\left(\frac{\pi\nu\sqrt{u}}{a}\right) = \frac{4}{a}f\left(\frac{\pi\nu\sqrt{y^2 + z^2}}{a}\right).$$

Nous avons vu que ce coefficient A_ν vérifie l'équation différentielle (11),

$$u\frac{d^2A_\nu}{du^2} + \frac{dA_\nu}{du} - \frac{\nu^2\pi^2}{a^2}A_\nu = 0;$$

introduisons dans cette équation la variable indépendante ε liée à u par la relation

$$\varepsilon = \frac{\pi\nu\sqrt{u}}{a}, \qquad u = \frac{a^2\varepsilon^2}{\pi^2\nu^2};$$

l'équation différentielle deviendra

$$(14)\qquad \varepsilon\frac{d^2A_\nu}{d\varepsilon^2} + \frac{dA_\nu}{d\varepsilon} - 4\varepsilon A_\nu = 0.$$

Il serait d'ailleurs facile de vérifier directement que l'intégrale définie

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\varepsilon\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}\frac{d\tau}{\tau}$$

satisfait à cette équation. Il suffirait de partir de l'identité

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(\tau-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\varepsilon\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}\right] = \left[-\frac{\varepsilon}{\tau}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)^2+\frac{4\varepsilon}{\tau}+\frac{1}{\tau}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)\right]e^{-\varepsilon\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}$$

et d'intégrer les deux membres entre les limites o et ∞, en remarquant que l'intégrale du premier membre s'annule aux limites.

Si, dans l'équation différentielle (14), on fait

$$\varepsilon = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\eta,$$

elle devient

$$\eta\frac{d^2 A_\nu}{d\eta^2}+\frac{d^2 A_\nu}{d\eta}+\eta A_\nu = 0,$$

ce qui est l'équation différentielle bien connue à laquelle satisfait la fonction de Fourier

$$J_0(\eta) = 1-\frac{\eta^2}{2^2}+\frac{\eta^4}{2^2 4^2}-\frac{\eta^6}{2^2 4^2 6^2}+\ldots,$$

qui est un cas particulier des fonctions de Bessel (*voir*, par exemple, le Traité de Todhunter : *The Functions of Laplace, Lamé and Bessel*, Chap. XXXII).

Une seconde intégrale particulière de l'équation différentielle est fournie par la fonction complémentaire Y_0 introduite par Neumann : *Theorie der Bessel'schen Functionen*, Leipzig, 1867, § 17). L'intégrale $f'(\varepsilon)$ est donc de la forme

$$f(\varepsilon) = AJ_0(2\varepsilon\sqrt{-1})+BY_0(2\varepsilon\sqrt{-1}),$$

A et B désignant des constantes numériques [1].

Cette intégrale

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau}e^{-\varepsilon\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}$$

(1) *Voyez* un Mémoire de M. H. Weber, *Journal de Crelle*, t. 75.

a été employée par Riemann dans la solution d'une question de Physique mathématique : *Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe* (¹). En écrivant

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\tau}{\tau} e^{-\varepsilon\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}+\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-\varepsilon\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}$$

et remplaçant, dans la première intégrale, τ par $\frac{1}{\tau}$, on voit qu'elle devient identique à la seconde; donc

$$f(\varepsilon)=\int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-\varepsilon\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}.$$

Faisant alors

$$\tau+\frac{1}{\tau}=2t,$$

$$\tau=t+\sqrt{t^2-1},$$

on trouve

$$f(\varepsilon)=\int_1^\infty \frac{e^{-2\varepsilon t}\,dt}{\sqrt{t^2-1}},$$

ce qui est l'intégrale considérée par Riemann à la page 58 du Mémoire cité. D'après ce grand géomètre, la fonction $f(\varepsilon)$ est développable en série sous la forme suivante

$$f(\varepsilon)=\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\varepsilon^{2m}}{(1.2\ldots m)^2}[\Psi(m)-\log\varepsilon],$$

$\Psi(m)$ désignant, suivant la notation de Gauss, la fonction

$$\frac{d\log\Gamma(m+1)}{dm}.$$

Cette même intégrale a été développée en série semi-convergente par M. Stieltjes dans une thèse soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris, le 30 juin 1886 (²).

(¹) *Riemann's Gesammelte mathematische Werke*, p. 54.
(²) *Voyez* également un Mémoire de M. Lipschitz, *Journal de Crelle*, t. 56.

Dans le Mémoire de Riemann : *Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe*, cette fonction $f(\varepsilon)$ est introduite pour calculer les coefficients du développement en série trigonométrique de la fonction

$$U = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2m\beta - \alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2m\beta + \alpha)^2}} \right],$$

où

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Or, d'après les notations que nous employons dans le présent Mémoire, on a

$$\mathfrak{S}_1(z, x, y; 4\beta) = \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2 + x^2}} + \sum' \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 4n\beta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{16 n^2 \beta^2}} \right];$$

la fonction U de Riemann est donc

$$\begin{aligned} U = \mathfrak{S}_1(z - \alpha, x, y; 4\beta) - \mathfrak{S}_1(z - \alpha + 2\beta, x, y; 4\beta) \\ - \mathfrak{S}_1(z + \alpha, x, y; 4\beta) + \mathfrak{S}_1(z + \alpha + 2\beta, x, y; 4\beta). \end{aligned}$$

En remplaçant la fonction $\mathfrak{S}_1$ par les développements qui résultent des formules (13) et (13'), on retrouverait l'expression de U donnée par Riemann,

$$U = \sum \sin \frac{n\pi}{2\beta} z \frac{4 \sin \frac{n\pi}{2\beta} \alpha}{\beta} \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{n\pi}{2\beta} rt}}{\sqrt{t^2 - 1}} dt,$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs *entières positives et impaires* de n.

En se reportant à la Note de M. Chervet (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 24 septembre 1883), on voit que le potentiel déterminé par M. Chervet est, à un facteur constant près,

$$\mathfrak{S}_1(x, y, z; 2\pi) - \mathfrak{S}_1(x + \pi, y, z; 2\pi),$$

c'est-à-dire, d'après le développement que nous avons trouvé,

$$\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}[1-(-1)^{\nu}]\,f\left(\tfrac{1}{2}\nu\sqrt{y^2+z^2}\right)\cos\nu x$$

ou, plus simplement,

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty} f\left[\tfrac{1}{2}(2n+1)\sqrt{y^2+z^2}\right]\cos(2n+1)x.$$

5. Voici maintenant un développement analogue au précédent, relatif à une fonction qui admet deux groupes de périodes.

Désignons par a et b deux quantités positives, par m et n deux nombres entiers, et faisons

$$r_{m,n}=\sqrt{(x-ma)^2+(y-nb)^2+z^2},$$
$$\rho_{m,n}=\sqrt{m^2a^2+n^2b^2}.$$

La fonction dont il s'agit est définie par la série

$$(15)\qquad \mathfrak{S}_2(x, y, z;\, a, b) = \frac{1}{r_{0,0}} + \sum{}'\left(\frac{1}{r_{m,n}} - \frac{1}{\rho_{m,n}} - \frac{amx+bny}{\rho^3_{m,n}}\right),$$

la somme $\sum'$ étant étendue à toutes les valeurs entières, positives, négatives et nulles de m et n, la combinaison $m=n=0$ étant seule exceptée. Cette fonction $\mathfrak{S}_2$ vérifie l'équation $\Delta\mathfrak{S}_2=0$; elle a pour pôles de résidus $+1$ tous les points de coordonnées

$$x=ma,\qquad y=nb,\qquad z=0,$$

m et n prenant toutes les valeurs entières, positives, négatives et nulles; elle est régulière en tous les autres points de l'espace situés à distance finie. La fonction $\mathfrak{S}_2$ ne change pas quand on ajoute a à x ou b à y : en d'autres termes, on a

$$\mathfrak{S}_2(x+a, y, z) = \mathfrak{S}_2(x, y+b, z) = \mathfrak{S}_2(x, y, z);$$

c'est ce que l'on vérifie immédiatement sur la série (15) en formant la différence

$$\mathfrak{S}_2(x+a, y, z) - \mathfrak{S}_2(x, y, z),$$

et groupant ensemble les termes qui correspondent à des valeurs de m égales et de signes contraires : on reconnaît alors que cette différence est nulle. Enfin la fonction $\mathfrak{S}_2$ est paire par rapport à chacune des variables x, y et z.

Cette fonction se présente dans différentes questions de Physique, notamment dans la détermination du potentiel en un point d'une masse fluide indéfinie, ayant la forme d'un prisme droit à base rectangle, traversée par un flux d'électricité [1], ou dans l'évaluation des vitesses aux différents points d'un liquide qui s'écoule par le fond d'un vase prismatique à base rectangle [2], enfin dans la détermination de la fonction de Green pour un prisme droit indéfini à base rectangle.

Dans tout l'espace situé d'un même côté du plan des coordonnées xy, par exemple pour toutes les valeurs positives de z, cette fonction et toutes ses dérivées sont développables en séries trigonométriques procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi x}{a}$ et $\frac{2\pi y}{b}$. En particulier, pour toutes les valeurs de z plus grandes que zéro, la fonction $\mathfrak{S}_2(x, y, z; a, b)$ est développable en une double série de la forme

$$(16) \qquad \mathfrak{S}_2 = \sum_{\mu=0,\ \nu=0}^{\mu=\infty,\ \nu=\infty} A_{\mu,\nu} \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\nu\pi y}{b},$$

ne contenant que des cosinus, puisque la fonction $\mathfrak{S}_2$ est *paire* par rapport à chacune des variables x et y. La connaissance de ce développement est importante pour le calcul numérique de la fonction $\mathfrak{S}_2$.

Les coefficients $A_{\mu,\nu}$ sont des fonctions de z; en procédant comme précédemment pour la fonction $\mathfrak{S}_1$, nous calculerons d'abord les dérivées $\frac{dA_{\mu,\nu}}{dz}$ de ces coefficients par rapport à z.

---

(1) *Voir* une Note présentée par MM. Chervet et Appell (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCVIII, p. 359.

(2) *Voir* différentes Notes de M. Boussinesq (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séances des 3 et 31 janvier, 30 mai 1870.

D'après les développements ci-dessus (15) et (16), on a, en différentiant par rapport à z,

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Theta_2}{dz} = -\dfrac{z}{r_{0,0}^3} - \sum' \dfrac{z}{r_{m,n}^3} = -z \displaystyle\sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} \dfrac{1}{r_{m,n}^3}, \\ \dfrac{d\Theta_2}{dz} = \displaystyle\sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} \dfrac{dA_{\mu,\nu}}{dz} \cos\dfrac{2\mu\pi x}{a} \cos\dfrac{2\nu\pi y}{b}. \end{cases}$$

Voici comment on peut calculer les coefficients $\dfrac{dA_{\mu,\nu}}{dz}$ de ce dernier développement.

D'après l'équation de la page 10,

$$\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{t}\, e^{-Nt}\, dt,$$

dans laquelle on fait

$$N = r_{m,n}^2 = (x - ma)^2 + (y - nb)^2 + z^2,$$

on a

$$\frac{1}{r_{m,n}^3} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{t}\, dt.\, e^{-t[(x-ma)^2+(y-nb)^2+z^2]};$$

donc

$$\frac{d\Theta_2}{dz} = -\frac{2z}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{t}\, dt.\, e^{-t(x^2+y^2+z^2)} \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} e^{-t(m^2a^2-2max+n^2b^2-2nby)}.$$

Or, en suivant les mêmes notations que plus haut, on a

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{-t(m^2a^2-2max)} = \theta_3\left(x, \frac{\pi i}{at}, -a\right),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-t(n^2b^2-2nby)} = \theta_3\left(y, \frac{\pi i}{bt}, -b\right),$$

et, par suite,

$$(18)\quad \frac{d\Theta_2}{dz} = -\frac{2z}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{t}\, dt.\, e^{-t(x^2+y^2+z^2)}\, \theta_3\left(x, \frac{\pi i}{at}, -a\right) \theta_3\left(y, \frac{\pi i}{bt}, -b\right).$$

D'autre part, d'après la transformation des fonctions θ_3 en fonctions ϑ_3, rappelée précédemment (p. 11), on a

$$e^{-tx^2}\theta_3\left(x, \frac{\pi i}{at}, -a\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\left(1 + 2\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} e^{-\frac{\pi^2\mu^2}{a^2 t}} \cos\frac{2\mu\pi x}{a}\right),$$

$$e^{-ty^2}\theta_3\left(y, \frac{\pi i}{bt}, -b\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{b\sqrt{t}}\left(1 + 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{b^2 t}} \cos\frac{2\nu\pi y}{b}\right),$$

et, en multipliant membre à membre, on peut écrire

$$e^{-t(x^2+y^2)}\theta_3\left(x, \frac{\pi i}{at}, -a\right)\theta_3\left(y, \frac{\pi i}{bt}, -b\right)$$

$$= \frac{\pi}{abt}\sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} 4e^{-\frac{\pi^2}{t}\left(\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}\right)} \cos\frac{2\mu\pi x}{a}\cos\frac{2\nu\pi y}{b},$$

avec cette convention que le coefficient 4 du terme général doit être remplacé par 2 quand l'un des entiers μ ou ν est nul, et par 1 quand les deux entiers μ et ν sont nuls. En substituant dans l'expression (18) de $\frac{\partial\Theta_2}{\partial z}$, on trouve pour $\frac{\partial\Theta_2}{\partial z}$ un développement de la forme cherchée

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} \frac{dA_{\mu,\nu}}{dz}\cos\frac{2\mu\pi x}{a}\cos\frac{2\nu\pi y}{b},$$

dans lequel des coefficients ont pour valeurs

$$(19)\qquad \frac{dA_{\mu,\nu}}{dz} = -\frac{8z\sqrt{\pi}}{ab}\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}e^{-tz^2-\frac{\pi^2}{t}\left(\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}\right)},$$

où le facteur 8 doit être remplacé par 4, lorsque l'un des entiers μ, ν est nul, et par 2 quand ces entiers sont nuls tous deux.

L'intégrale définie à laquelle on est ainsi conduit est connue : elle a été donnée par Legendre dans ses *Exercices de Calcul intégral*, t. Ier, § IX. Legendre démontre, en effet, que l'on a

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}dx\, e^{-\frac{1+x^2}{2nx}} = \sqrt{2n\pi}\, e^{-\frac{1}{n}}.$$

Or, l'intégrale qui figure dans l'équation (19) est de la forme

$$\psi(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-\alpha^2 t - \frac{\beta^2}{t}};$$

en y faisant

$$t = \frac{\beta}{\alpha} x,$$

on obtient

$$\psi(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} dx\, e^{\frac{-\alpha\beta(x^2+1)}{x}},$$

ce qui est l'intégrale de Legendre, dans laquelle $n = \frac{1}{2\alpha\beta}$; on a donc

$$\psi(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha\beta}} e^{-2\alpha\beta} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-2\alpha\beta}.$$

Donc enfin, en faisant $\alpha = z$, $\beta = \pi\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}$,

$$(20) \qquad \frac{dA_{\mu,\nu}}{dz} = -\frac{8z\sqrt{\pi}}{ab}\psi\left(z, \pi\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}\right) = -\frac{8\pi}{ab} e^{-2\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}}.$$

Tels sont les coefficients du développement de $\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z}$. Pour avoir les coefficients $A_{\mu,\nu}$ du développement de ε_2, il faut intégrer les expressions (20) que nous venons de trouver.

Tout d'abord, en supposant $\mu = \nu = 0$ et se souvenant que le facteur 8 doit alors être remplacé par 2, on a

$$\frac{dA_{0,0}}{dz} = -\frac{2\pi}{ab},$$

d'où

$$A_{0,0} = -\frac{2\pi z}{ab} + B_{0,0},$$

$B_{0,0}$ étant une constante indépendante de x, y, z. Puis, en supposant l'un au moins des entiers μ et ν différent de zéro, on a

$$(21) \qquad A_{\mu,\nu} = \frac{4}{ab\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}} e^{-2\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}} + B_{\mu,\nu},$$

où le facteur 4 doit être réduit à 2 quand l'un des entiers μ ou ν est nul, et où $B_{\mu,\nu}$ désigne une constante. Il est facile de voir que toutes les constantes $B_{\mu,\nu}$, à l'exception de $B_{0,0}$ sont *nulles*. En effet, si l'on exprime que la fonction

$$\varepsilon_2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} A_{\mu,\nu} \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\nu\pi y}{b}$$

vérifie l'équation $\Delta\varepsilon_2 = \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z^2} = 0$, il vient

$$\frac{d^2 A_{\mu,\nu}}{dz^2} - 4\pi^2\left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}\right) A_{\mu,\nu} = 0;$$

si l'on substitue dans cette équation la valeur (21) de $A_{\mu,\nu}$, dans laquelle $B_{\mu,\nu}$ est une constante indépendante de z, on trouve immédiatement

$$\left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}\right) B_{\mu,\nu} = 0,$$

ce qui donne $B_{\mu,\nu} = 0$ tant que μ et ν ne sont pas nuls tous deux.

En résumé, on a, pour la fonction $\varepsilon_2(x, y, z; a, b)$, le développement suivant

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_2(x, y\, z; a, b) = {} & -\frac{2\pi z}{ab} + B_{0,0} \\ & + {\sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty}}' \frac{4e^{-2\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}}{ab\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}} \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\nu\pi y}{b}, \end{aligned}\right.$$

où, dans la somme $\sum'$, il faut laisser de côté la combinaison $\mu = \nu = 0$, et où le facteur 4 doit être remplacé par 2 quand l'un des entiers μ ou ν est nul. Il ne restera plus qu'à déterminer la constante $B_{0,0}$, qui dépend de a et b.

On pourra déterminer cette constante en attribuant à x, y, z des valeurs particulières : par exemple, si l'on fait $x = y = 0$, on a

$$B_{0,0} = \varepsilon_2(0, 0, z; a, b) + \frac{2\pi z}{ab} - {\sum}' \frac{4e^{-2\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}}{ab\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}},$$

formule dans laquelle z a une valeur positive quelconque.

D'après une Note *Sur la distribution du potentiel dans l'intérieur d'une masse liquide ayant la forme d'un prisme droit à base rectangle*, que nous avons présentée à l'Académie des Sciences, M. Chervet et moi [1], ce potentiel s'exprime par la formule

$$\frac{V}{V_0} = \varpi_2(x, y, z; a, b) - \varpi_2\left(x, y + \frac{b}{2}, z; a, b\right),$$

car la fonction appelée dans la Note $\varphi(x, y, z)$ est $\varpi_2(x, y, z; a, b)$. On a donc, en vertu du développement (22) que nous venons de trouver,

$$\frac{V}{V_0} = \sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} \frac{4}{ab} \frac{e^{-2\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}} [1-(-1)^\nu] \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\nu\pi y}{b}$$

ou, plus simplement,

$$\frac{V}{V_0} = \sum_{\mu,\rho} \frac{8}{ab} \frac{e^{-2\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\rho^2}{b^2}}}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\rho^2}{b^2}}} \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\rho\pi y}{b},$$

l'entier μ prenant toutes les valeurs de 0 à $+\infty$, et l'entier ρ toutes les valeurs *impaires* de 1 à $+\infty$; le coefficient 8 du terme général devra être remplacé par 4 dans tous les termes dans lesquels $\mu = 0$.

Il est intéressant de rapprocher le développement (22) de la fonction ϖ_2 du développement en série trigonométrique de la fonction de deux variables réelles x et y

$$w = \log \sin\frac{x+yi}{2} \sin\frac{x-yi}{2},$$

qui vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Comme

$$\sin\frac{x+yi}{2}\sin\frac{x-yi}{2} = \frac{e^{\frac{xi-y}{2}} - e^{-\frac{xi-y}{2}}}{2i} \, \frac{e^{\frac{xi+y}{2}} - e^{-\frac{xi+y}{2}}}{2i}$$

$$= \frac{e^y}{4}(1 - e^{xi-y})(1 - e^{-xi-y}),$$

---

[1] Séance du 11 février 1884.

on a

$$w = y - 2\log 2 + \log(1 - e^{xi-y}) + \log(1 - e^{-xi-y});$$

d'où, pour toutes les valeurs positives de y,

$$w = y - 2\log 2 - 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{e^{-\nu y}}{\nu} \cos \nu x;$$

nous obtenons ainsi un développement dont l'analogie avec la série (22) s'aperçoit immédiatement.

4. On peut obtenir le développement de la fonction $\mathfrak{S}_2$ par une autre méthode qui nous fournira une vérification des résultats précédents.

Donnons à z une valeur positive c : alors la fonction $\mathfrak{S}_2$ et sa dérivée $\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial c}$ seront développables en séries trigonométriques

$$\mathfrak{S}_2(x, y, c; a, b) = \sum_{\mu, \nu = 0}^{\mu, \nu = \infty} A_{\mu, \nu} \cos \frac{2\mu\pi x}{a} \cos \frac{2\nu\pi y}{b},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_2(x, y, c; a, b)}{\partial c} = \sum_{\mu, \nu = 0}^{\mu, \nu = \infty} \frac{dA_{\mu, \nu}}{dc} \cos \frac{2\mu\pi x}{a} \cos \frac{2\nu\pi y}{b},$$

et l'on aura

$$(23) \quad \begin{cases} A_{\mu, \nu} = \dfrac{4}{ab} \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+a} dx \int_{y_0}^{y_0+b} \mathfrak{S}_2(x, y, c) \cos \frac{2\mu\pi x}{a} \cos \frac{2\nu\pi y}{b}\, dy, \\[2ex] \dfrac{dA_{\mu, \nu}}{dc} = \dfrac{4}{ab} \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+a} dx \int_{y_0}^{y_0+b} \frac{\partial \mathfrak{S}_2(x, y, c)}{\partial c} \cos \frac{2\mu\pi x}{a} \cos \frac{2\nu\pi y}{b}\, dy, \end{cases}$$

où le facteur 4 doit être remplacé par 2 si μ ou ν est nul, et par 1 si μ et ν sont nuls.

Pour calculer ces intégrales, nous emploierons une méthode analogue à celle de M. Hermite pour le calcul des coefficients du développement d'une fonction doublement périodique en série trigonométrique.

Considérons le parallélépipède rectangle P dont les faces ont pour équations

$$x = \pm \frac{a}{2}, \qquad y = \pm \frac{b}{2}, \qquad z = \pm c,$$

c étant une constante positive quelconque. Dans l'intérieur de ce parallélépipède, la fonction $\varphi_2(x, y, z)$ a un seul point singulier, à savoir l'origine qui est un pôle simple de résidu $+1$; en d'autres termes, la différence

$$U = \varphi_2(x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

est régulière en tous les points du parallélépipède P. D'autre part, la fonction

$$\psi(x, y, z) = e^{2\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}} \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\nu\pi y}{b}$$

vérifie l'équation $\Delta\psi = 0$ et est régulière en tous les points à distance finie. Les deux fonctions $\varphi_2(x, y, z)$ et $\psi(x, y, z)$ admettant les groupes de périodes $(a, 0, 0)$, et $(0, b, 0)$ reprennent les mêmes valeurs aux points correspondants des faces $x = \pm\frac{a}{2}$, $y = \pm\frac{b}{2}$, que nous appellerons les faces latérales du parallélépipède P; il en est de même de leurs dérivées partielles. On peut remarquer que les dérivées partielles

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

s'annulent, les deux premières sur les faces latérales $x = \pm\frac{a}{2}$ et les deux dernières sur les faces $y = \pm\frac{b}{2}$. Cela résulte immédiatement de ce que l'équation

$$\frac{\partial\varphi_2(x + a, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_2(x, y, z)}{\partial x},$$

dans laquelle on fait $x = -\frac{a}{2}$, donne

$$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)_{\left(x = \frac{a}{2}\right)} = \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)_{\left(x = -\frac{a}{2}\right)};$$

d'un autre côté, la fonction $\varphi_2(x, y, z)$ étant paire en x, sa dérivée

$\frac{\partial \Theta_2}{\partial x}$ est impaire et l'on a aussi

$$\left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = -\left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial x}\right)_{x=-\frac{a}{2}};$$

donc, en ajoutant et retranchant,

$$\left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial x}\right)_{x=-\frac{a}{2}} = 0.$$

Il en serait de même de $\frac{\partial \Theta_2}{\partial y}$ sur les faces $y = \pm \frac{b}{2}$. Pour ce qui est des dérivées $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, la proposition est évidente.

Enfin, la fonction Θ_2 étant paire en z, on a

$$\Theta_2(x, y, -c) = \Theta_2(x, y, c), \qquad \left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial z}\right)_{z=-c} = -\left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial z}\right)_{z=c}.$$

Cela posé, décrivons autour de l'origine comme centre une sphère s de rayon r assez petit pour que la sphère soit comprise dans l'intérieur du parallélépipède P. Dans l'espace E compris entre la surface de cette sphère s et la surface du parallélépipède P, les deux fonctions Θ_2 et ψ sont régulières; on a donc, en appliquant le théorème de Green à cet espace,

$$\int\int\left(\Theta_2 \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \Theta_2}{\partial n}\right) d\sigma = \int\int\int(\Theta_2 \Delta\psi - \psi\Delta\Theta_2)\, dx\, dy\, dz = 0,$$

l'intégrale double étant étendue à la surface qui limite l'espace E et l'intégrale triple à l'espace E lui-même; cette intégrale triple est évidemment *nulle*. L'intégrale double peut être partagée en deux parties : l'une relative à la surface du parallélépipède P, l'autre à celle de la sphère s; on aura donc

$$(24) \quad \int\int_{P}\left(\Theta_2 \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \Theta_2}{\partial n}\right) d\sigma + \int\int_{s}\left(\Theta_2 \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \Theta_2}{\partial n}\right) d\sigma = 0,$$

les dérivées $\frac{\partial \psi}{\partial n}$, $\frac{\partial \Theta_2}{\partial n}$ étant prises suivant la normale vers l'extérieur de

l'espace E, c'est-à-dire pour la première intégrale vers l'extérieur du parallélépipède et pour la seconde vers l'intérieur de la sphère s. Cette seconde intégrale

$$(25)\qquad \int\int_s \left(\varphi_2 \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right) d\sigma$$

est égale à -4π. En effet, comme la normale à la sphère est le rayon r, on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial r};$$

dans l'intérieur et sur la surface de la sphère s, on peut écrire

$$\varphi_2 = \frac{1}{r} + \mathrm{U},$$

U étant une fonction régulière : alors l'intégrale (25) devient

$$-\int\int_s \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\psi\right) d\sigma - \int\int_s \left(\mathrm{U}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r}\right) d\sigma;$$

la seconde intégrale est nulle, car les fonctions U et ψ sont régulières dans l'intérieur de la sphère s; quant à la première, comme l'élément superficiel de la sphère s est $d\sigma = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$, elle s'écrit

$$-\int\int \left| r\frac{\partial\psi}{\partial r} + \psi(x, y, z) \right| \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

et, en supposant que r tende vers zéro,

$$-\int\int \psi(0, 0, 0) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

c'est-à-dire -4π; car $\psi(0, 0, 0) = 1$.

L'intégrale (25) étant égale à -4π, la relation (24) s'écrit

$$(26)\qquad \int\int_{\mathrm{P}} \left(\varphi_2 \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right) d\sigma = 4\pi,$$

l'intégrale étant étendue à la surface du parallélépipède P et les déri-

vées $\frac{\partial\psi}{\partial n}$, $\frac{\partial\Theta_2}{\partial n}$ étant prises normalement aux faces vers l'extérieur. Les parties de cette intégrale relatives aux faces latérales sont *nulles*. En effet, sur la face $x = \frac{a}{2}$, par exemple, on a

$$\frac{\partial\Theta_2}{\partial n} = \frac{\partial\Theta_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial x},$$

et nous avons vu que les dérivées $\frac{\partial\Theta_2}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{dx}$ s'annulent pour $x = \pm\frac{a}{2}$. Donc sur les faces latérales tous les éléments de l'intégrale (26) sont nuls, et il ne reste plus qu'à évaluer les parties de cette intégrale relatives aux faces supérieure et inférieure du parallélépipède $z = \pm c$. Sur la face supérieure on a

$$\Theta_2 = \Theta_2(x, y, c),$$

$$\frac{\partial\Theta_2}{\partial n} = \frac{\partial\Theta_2(x, y, c)}{\partial c},$$

$$\psi = e^{2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}\cos\frac{2\mu\pi x}{a}\cos\frac{2\nu\pi y}{b},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial c} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}\,e^{2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}\cos\frac{2\mu\pi x}{a}\cos\frac{2\nu\pi y}{b},$$

$$d\sigma = dx\,dy;$$

d'après les valeurs (23) des coefficients $A_{\mu,\nu}$ et $\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}$, la valeur de l'intégrale (26) étendue à la face supérieure $z = c$ est donc

$$\frac{ab}{4}\left(2\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}A_{\mu,\nu} - \frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}\right)e^{2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}.$$

De même, sur la face inférieure $z = -c$, on a

$$\Theta_2 = \Theta_2(x, y, -c) = \Theta_2(x, y, c),$$

$$\psi = e^{-2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}\cos\frac{2\mu\pi x}{a}\cos\frac{2\nu\pi y}{b},$$

$$\frac{\partial\Theta_2}{\partial n} = \frac{\partial\Theta_2(x, y, -c)}{\partial c} = \frac{\partial\Theta_2(x, y, c)}{\partial c},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial c} = -2\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}\,e^{2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}\cos\frac{2\mu\pi x}{a}\cos\frac{2\nu\pi y}{b},$$

car, actuellement, $dn = -dz = dc$; de plus

$$d\sigma = dx\,dy.$$

La valeur de l'intégrale (26) étendue à la face inférieure est donc

$$\frac{ab}{4}\left(-2\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}\,A_{\mu,\nu}-\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}\right)e^{-2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}.$$

Donc, enfin, l'équation (26) s'écrit

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &2\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}\left(e^{2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}-e^{-2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}\right)A_{\mu,\nu}\\ &\qquad-\left(e^{2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}+e^{-2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}\right)\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}=\frac{16\pi}{ab}.\end{aligned}\right.$$

On a ainsi une équation différentielle linéaire du premier ordre définissant $A_{\mu,\nu}$ comme fonction de c. En intégrant cette équation, on trouve immédiatement, dans la supposition que μ et ν ne sont pas nuls tous deux,

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} A_{\mu,\nu}&=\frac{4}{ab\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}\,e^{-2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}\\ &\quad+C_{\mu,\nu}\left(e^{2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}+e^{-2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}\right),\end{aligned}\right.$$

$C_{\mu,\nu}$ désignant une constante d'intégration indépendante de c. Il est aisé de voir que cette constante $C_{\mu,\nu}$ est nulle, en s'appuyant sur ce que la valeur de $\frac{1}{c}\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}$ reste finie quand c augmente indéfiniment. En effet, on a

$$\frac{1}{c}\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}=\frac{4}{ab}\int_{x_0}^{x_0+a}dx\int_{y_0}^{y_0+b}\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{S}_2(x,y,c)}{\partial c}\cos\frac{2\mu\pi x}{a}\cos\frac{2\nu\pi y}{b}\,dy;$$

comme

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{S}_2}{\partial c}=-\sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty}\frac{1}{[(x-ma)^2+(y-nb)^2+c^2]^{\frac{3}{2}}},$$

la valeur absolue de $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial c}$ va en diminuant quand c augmente; la quantité $\frac{1}{c}\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}$ reste donc finie quand c augmente indéfiniment. Or il n'en serait pas ainsi si, dans la valeur (28) de $A_{\mu,\nu}$, la constante $C_{\mu,\nu}$ n'était pas nulle. On a donc

$$A_{\mu,\nu} = \frac{4e^{-2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}}{ab\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}},$$

expression identique à celle que nous avons trouvée précédemment, puisque $z = c$. Pour ce qui est de $A_{0,0}$, l'équation (27), dans laquelle on fait $\mu = \nu = 0$ et dans laquelle, d'après des conventions antérieures, on réduit le second membre au quart de sa valeur, nous donne

$$\frac{dA_{0,0}}{dc} = -\frac{2\pi}{ab};$$

d'où

$$A_{0,0} = -\frac{2\pi c}{ab} + B_{0,0},$$

expression identique à l'expression déjà trouvée.

5. Les fonctions $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ dont nous venons de former les développements en série trigonométrique possèdent un ou deux groupes de périodes. Nous allons maintenant nous occuper des développements en série trigonométrique des fonctions uniformes satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ et admettant trois groupes de périodes, c'est-à-dire le nombre maximum de groupes de périodes que puisse posséder une fonction uniforme de trois variables réelles. J'ai démontré (*Acta mathematica*, t. IV, p. 347 et suiv.) que celles de ces fonctions qui n'ont que des pôles peuvent s'exprimer linéairement à l'aide d'une fonction $Z(x, y, z)$ et de ses dérivées, par une formule analogue à celle de M. Hermite pour la décomposition des fonctions doublement périodiques en éléments simples.

Les fonctions de x, y, z qui admettent trois groupes de périodes reprennent les mêmes valeurs aux points homologues d'un réseau de parallélépipèdes; en me plaçant dans le cas le plus simple, je suppo-

serai ici ces parallélépipèdes *rectangles*. Alors, en prenant des axes de coordonnées parallèles aux arêtes de ces parallélépipèdes et appelant 2α, 2β, 2γ les dimensions des parallélépipèdes, on aura, pour les coordonnées des sommets du réseau,

$$x = 2m\alpha, \qquad y = 2n\beta, \qquad z = 2p\gamma,$$

m, n et p désignant des entiers qui prennent toutes les valeurs positives, négatives et nulles.

Voici quel est l'élément simple à l'aide duquel on peut exprimer toutes les fonctions F qui satisfont à l'équation $\Delta F = 0$, qui n'ont d'autres singularités que des pôles et qui reprennent les mêmes valeurs aux points homologues de ce réseau de parallélépipèdes. Faisons

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \rho = \sqrt{4m^2\alpha^2 + 4n^2\beta^2 + 4p^2\gamma^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{2m\alpha x + 2n\beta y + 2p\gamma z}{r\rho},$$

$$R = \sqrt{(x - 2m\alpha)^2 + (y - 2n\beta)^2 + (z - 2p\gamma)^2} = \sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\varphi + \rho^2};$$

l'élément simple est défini par la série suivante

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} & Z(x, y, z;\, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma) \\ & \quad = \frac{1}{r} + \sum{}' \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} - \frac{r}{\rho^2} P_1(\cos\varphi) - \frac{r^2}{\rho^3} P_2(\cos\varphi) \right], \end{aligned} \right.$$

où le signe Σ' indique une sommation étendue à toutes les valeurs entières, positives, négatives et nulles de m, n, p, la combinaison $m = n = p = 0$ étant seule exceptée, et où $P_1(\cos\varphi)$, $P_2(\cos\varphi)$ sont les deux premiers polynômes de Legendre

$$P_1(\cos\varphi) = \cos\varphi, \qquad P_2(\cos\varphi) = \tfrac{3}{2}(\cos^2\varphi - \tfrac{1}{3}).$$

Cette fonction particulière (29), relative au cas où les parallélépipèdes élémentaires sont *rectangles*, s'obtient en faisant, dans les formules générales établies dans le tome IV des *Acta mathematica*,

$$a = 2\alpha, \qquad b' = 2\beta, \qquad c'' = 2\gamma,$$

$$b = c = a' = c' = a'' = b'' = 0;$$

les simplifications qui se présentent alors dans les formules générales ont été indiquées dans un Mémoire paru récemment dans les *Acta mathematica* (t. VIII, Cahier III, p. 271).

La fonction Z définie par la série (29) vérifie l'équation $\Delta Z = 0$; elle a pour pôles de résidus $+1$ tous les points de coordonnées

$$x = 2m\alpha, \qquad y = 2n\beta, \qquad z = 2p\gamma,$$

m, n et p prenant toutes les valeurs entières, positives, négatives et nulles; elle est régulière en tous les autres points de l'espace situés à distance finie. Cette fonction est paire par rapport à chacune des variables x, y, z; elle vérifie les relations suivantes :

$$(30) \qquad \begin{cases} Z(x+2\alpha, y, z) = Z(x, y, z) + Ax + E, \\ Z(x, y+2\beta, z) = Z(x, y, z) + B'y + E', \\ Z(x, y, z+2\gamma) = Z(x, y, z) + C''z + E''. \end{cases}$$

où A, B′, C″, E, E′, E″ sont des constantes ayant pour valeurs

$$A = 2Z'_x(\alpha, 0, 0), \qquad B' = 2Z'_y(0, \beta, 0), \qquad C'' = 2Z'_z(0, 0, \gamma),$$
$$E = A\alpha, \qquad E' = B'\beta, \qquad E'' = C''\gamma,$$

comme on le voit, en faisant dans les équations (30) et celles qu'on en déduit par la différentiation $x = -\alpha$, $y = 0$, $z = 0$ ou $x = 0$, $y = -\beta$, $z = 0$, ou enfin $x = 0, y = 0, z = -\gamma$ (voir *Acta mathematica*, t. VIII, Cahier III). Cette fonction $Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$ se présente dans différentes questions de Physique mathématique, notamment dans la détermination de la fonction de Green pour un parallélépipède rectangle (*Acta mathematica*, *loc. cit.*). La fonction $Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$ n'est, d'après les relations (30), périodique par rapport à aucune des variables x, y, z; mais il est facile de la modifier légèrement, de façon qu'elle devienne périodique par rapport à deux des variables, x et y par exemple, sans cesser de vérifier l'équation $\Delta F = 0$. Après cette modification, on aura une fonction développable en série trigonométrique; il est important de déterminer les coefficients de ce développement pour le calcul numérique de la

fonction. C'est ce que nous allons faire, en suivant une méthode analogue à la seconde méthode que nous venons d'employer pour le développement de la fonction $\mathfrak{S}_2$.

6. Désignons par $\Psi(x, y, z)$ la fonction

$$(31)\quad \Psi(x, y, z) = Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma) - \frac{Ax^2}{4\alpha} - \frac{B'y^2}{4\beta} + \left(\frac{A}{4\alpha} + \frac{B'}{4\beta}\right)z^2,$$

les constantes A et B' étant celles qui figurent dans les relations fondamentales (30) relatives à la fonction Z. Cette fonction Ψ, ne différant de Z que par un polynôme qui satisfait à l'équation $\Delta F = 0$, satisfait à cette même équation et possède les mêmes pôles que Z avec les mêmes résidus. Les relations fondamentales (30) montrent immédiatement que l'on a

$$(32)\quad \begin{cases} \Psi(x+2\alpha, y, z) = \Psi(x, y, z), \\ \Psi(x, y+2\beta, z) = \Psi(x, y, z), \\ \Psi(x, y, z+2\gamma) = \Psi(x, y, z) + \gamma\left(\frac{A}{\alpha} + \frac{B'}{\beta} + \frac{C''}{\gamma}\right)(z+\gamma) \\ \qquad\qquad\qquad = \Psi(x, y, z) - \frac{\pi}{\alpha\beta}(z+\gamma). \end{cases}$$

En effet, la différence $\Psi(x+2\alpha, y, z) - \Psi(x, y, z)$ est

$$Z(x+2\alpha, y, z) - Z(x, y, z) - \frac{A}{4\alpha}[(x+2\alpha)^2 - x^2],$$

c'est-à-dire zéro, puisque la différence $Z(x+2\alpha, y, z) - Z(x, y, z)$ est égale à $Ax + E$ ou $A(x+\alpha)$, d'après la valeur de E qui est égale à $A\alpha$. On démontre de même la seconde des relations (32). Quant à la troisième, elle résulte de ce que la différence

$$\Psi(x, y, z+2\gamma) - \Psi(x, y, z)$$

est égale à

$$C''(z+\gamma) + \left(\frac{A}{4\alpha} + \frac{B'}{4\beta}\right)[(z+2\gamma)^2 - z^2]$$

ou, en réduisant, à

$$(33)\quad \gamma\left(\frac{A}{\alpha} + \frac{B'}{\beta} + \frac{C''}{\gamma}\right)(z+\gamma).$$

Cette expression peut être simplifiée à l'aide d'une formule générale établie à la page 359 de mon Mémoire du tome IV des *Acta mathematica*. Cette formule appliquée au cas actuel, dans lequel les quantités qui figurent dans la formule générale en question ont les valeurs particulières suivantes

$$\mu = \nu = \lambda' = \nu' = \lambda'' = \mu'' = 0, \qquad \lambda = \mu' = \nu'' = 1,$$

$$\theta = \theta' = \theta'' = \frac{\pi}{2}, \qquad l = 2\alpha, \qquad l' = 2\beta, \qquad l'' = 2\gamma,$$

nous donne

$$A\beta\gamma + B'\gamma\alpha + C''\alpha\beta = -\pi,$$

d'où

$$\frac{A}{\alpha} + \frac{B'}{\beta} + \frac{C''}{\gamma} = -\frac{\pi}{\alpha\beta\gamma};$$

la quantité (33) est donc égale à $-\frac{\pi}{\alpha\beta}(z+\gamma)$.

Sans avoir recours à cette formule générale, on pourrait, en écrivant la troisième des relations (32) sous la forme

$$(34) \qquad \Psi(x, y, z + 2\gamma) - \Psi(x, y, z) = Gz + H,$$

G et H désignant des constantes, montrer que l'on a

$$H = G\gamma, \qquad G = -\frac{\pi}{\alpha\beta}.$$

Il suffirait de remarquer que, la fonction Z étant paire par rapport à chacune des variables x, y, z, la fonction Ψ l'est également; faisant alors dans la relation précédente $z = -\gamma$, on trouve zéro pour le premier membre, d'où $G\gamma - H = 0$. La constante H étant ainsi déterminée, on aura G en remarquant que l'intégrale double

$$\iint \frac{\partial\Psi}{\partial n}\, d\sigma,$$

étendue à la surface du parallélépipède formé par les six plans

$$x = \pm\alpha, \qquad y = \pm\beta, \qquad z = \pm\gamma,$$

est égale à -4π, car la fonction Ψ a dans ce parallélépipède un seul pôle de résidu $+1$; d'autre part, en vertu des deux premières relations (32) et de la relation (34), cette intégrale a pour valeur $4G\alpha\beta$; on a donc

$$G = -\frac{\pi}{\alpha\beta}.$$

On peut remarquer, pour simplifier certains calculs ultérieurs, que la dérivée partielle $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ s'annule pour $x = \pm\alpha$ et $\frac{\partial\Psi}{\partial y}$ pour $y = \pm\beta$. En effet, la première des relations (32) différentiée par rapport à x donne, pour $x = -\alpha$,

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{x=\alpha} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{x=-\alpha};$$

mais, comme la fonction Ψ est paire en x, la dérivée $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ est impaire, et l'on a

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{x=\alpha} = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{x=-\alpha}.$$

Les valeurs de ces deux dérivées sont donc *nulles*.

7. D'après les relations (32), la fonction $\Psi(x, y, z)$ admet par rapport à x la période 2α et par rapport à y la période 2β; comme entre les deux plans

$$z = 2p\gamma, \qquad z = 2(p+1)\gamma \qquad (p \text{ entier}),$$

cette fonction est régulière, elle est, dans l'espace compris entre ces deux plans, développable en une série trigonométrique procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{\pi x}{\alpha}$, $\frac{\pi y}{\beta}$; il en est de même de toutes ses dérivées.

En particulier, si l'on donne à z une valeur positive c comprise entre 0 et 2γ, la fonction $\Psi(x, y, c)$ est développable en une série de la forme

$$\Psi(x, y, c) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} A_{\mu,\nu} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi y}{\beta}$$

ne contenant que des cosinus, car la fonction Ψ est paire en x et en y.

Les coefficients de ce développement sont des fonctions de c, et l'on a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial c} = \sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} \frac{d A_{\mu,\nu}}{dc} \cos \frac{\mu \pi x}{\alpha} \cos \frac{\nu \pi y}{\beta}.$$

Les coefficients de ces deux développements sont donnés par les intégrales définies

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} A_{\mu,\nu} &= \frac{1}{\alpha\beta} \int_{x_0}^{x_0+2\alpha} dx \int_{y_0}^{y_0+2\beta} \Psi(x, y, c) \cos \frac{\mu \pi x}{\alpha} \cos \frac{\nu \pi y}{\beta}\, dx\, dy, \\ \frac{d A_{\mu,\nu}}{dc} &= \frac{1}{\alpha\beta} \int_{x_0}^{x_0+2\alpha} dx \int_{y_0}^{y_0+2\beta} \frac{\partial \Psi(x, y, c)}{\partial c} \cos \frac{\mu \pi x}{\alpha} \cos \frac{\nu \pi y}{\beta}\, dx\, dy, \end{aligned} \right.$$

ces coefficients devant être réduits à leur moitié si l'un des entiers μ ou ν est nul, et à leur quart si μ et ν sont nuls.

Pour évaluer ces coefficients, considérons la fonction

$$\varphi(x, y, z) = e^{\pi z \sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2}}} \cos \frac{\mu \pi x}{\alpha} \cos \frac{\nu \pi y}{\beta};$$

cette fonction vérifie l'équation $\Delta \varphi = 0$ et est régulière en tous les points de l'espace situés à distance finie; elle a, par rapport à x, la période 2α, par rapport à y la période 2β; la dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ s'annule pour $x = \pm \alpha$, et la dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ pour $x = \pm \beta$.

Soit P le parallélépipède formé par les six plans

$$x = \pm \alpha, \qquad y = \pm \beta, \qquad z = c, \qquad z = c - 2\gamma,$$

où c est positif et moindre que 2γ. Dans l'intérieur de ce parallélépipède, la fonction $\Psi(x, y, z)$ a un seul pôle, l'origine, qui est un pôle du premier degré de résidu $+1$. On en conclut, comme à la page 30, la relation

$$(36)\qquad \int\!\!\int_{P} \left(\Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) d\sigma = 4\pi,$$

l'intégrale double étant étendue à la surface du parallélépipède P et les

dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ et $\frac{\partial\Psi}{\partial n}$ étant prises normalement aux faces vers l'extérieur. Cette intégrale se partage en six parties relatives aux six faces du parallélépipède : les parties relatives aux faces latérales $x = \pm\alpha$, $y = \pm\beta$ sont nulles; car, sur la face $x = \alpha$, par exemple, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial n} = \frac{\partial\Psi}{\partial x},$$

et l'on a vu que ces dérivées partielles sont nulles pour $x = \alpha$; l'intégrale relative à la face $x = \alpha$ est donc nulle, puisque tous ses éléments sont nuls. Il ne reste plus qu'à évaluer les deux parties de l'intégrale (36) relatives l'une à la face supérieure $z = c$, l'autre à la face inférieure $z = c - 2\gamma$. On a, pour $z = c$,

$$\Psi = \Psi(x, y, c), \qquad \varphi = \varphi(x, y, c) = e^{\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}}} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta},$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = \frac{\partial\Psi}{\partial c}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial c} = \pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}}\, e^{\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}}} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta},$$

$$d\sigma = dx\,dy;$$

la partie de l'intégrale (36) relative à la face supérieure est donc, en faisant, pour abréger,

$$\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}} = (\mu, \nu),$$

$$e^{c(\mu,\nu)}\int_{-\alpha}^{+\alpha} dx \int_{-\beta}^{+\beta}\left[(\mu, \nu)\,\Psi(x, y, c) - \frac{\partial\Psi(x, y, c)}{\partial c}\right]\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta}\,dy,$$

c'est-à-dire, d'après les expressions (35) des coefficients $A_{\mu,\nu}$ et $\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}$,

$$\alpha\beta\, e^{c(\mu,\nu)}\left[(\mu, \nu)\,A_{\mu,\nu} - \frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}\right].$$

De même, sur la face inférieure $z = c - 2\gamma$, on a

$$\begin{aligned}\Psi(x, y, c - 2\gamma) &= \Psi(x, y, 2\gamma - c)\\ &= \Psi(x, y, -c) - \frac{\pi}{\alpha\beta}(-c + \gamma)\\ &= \Psi(x, y, c) + \frac{\pi}{\alpha\beta}(c - \gamma),\end{aligned}$$

et comme, pour cette face,

$$dn = -\,dz = -\,dc,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = -\frac{\partial\Psi(x, y, c-2\gamma)}{\partial c} = -\frac{\partial\Psi(x, y, c)}{\partial c} - \frac{\pi}{\alpha\beta};$$

puis

$$\varphi = \varphi(x, y, c-2\gamma) = e^{(c-2\gamma)(\mu,\nu)} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi y}{\beta},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\partial\varphi(x, y, c-2\gamma)}{\partial c} = -(\mu,\nu)\,e^{(c-2\gamma)(\mu,\nu)} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta}$$

et

$$d\sigma = dx\,dy;$$

d'où

$$\begin{aligned}\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\Psi}{\partial n} = -\,e^{(c-2\gamma)(\mu,\nu)}&\left[(\mu,\nu)\Psi(x,y,c) - \frac{\partial\Psi(x,y,c)}{\partial c}\right]\\ &\times\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta} - \frac{\pi}{\alpha\beta}e^{(c-2\gamma)(\mu,\nu)}[(\mu,\nu)(c-\gamma)-1]\\ &\times\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta}.\end{aligned}$$

En multipliant par $dx\,dy$ et intégrant par rapport à x et y de $-\alpha$ à $+\alpha$ et de $-\beta$ à $+\beta$, on obtient la partie de l'intégrale (36) relative à la face inférieure du parallélépipède P. Supposons d'abord que les deux entiers μ et ν ne sont pas nuls tous deux; alors l'intégrale

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} dx \int_{-\beta}^{+\beta} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta}\,dy$$

est *nulle*, et, d'après les expressions (35) de $A_{\mu,\nu}$ et $\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}$, la partie de l'intégrale (36) relative à la face inférieure est

$$-\alpha\beta\,e^{(c-2\gamma)(\mu,\nu)}\left[(\mu,\nu)A_{\mu,\nu} - \frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}\right].$$

L'intégrale

$$\iint_P \left(\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)d\sigma$$

étant la somme des deux expressions que nous venons de trouver pour

les faces supérieure et inférieure, et étant d'ailleurs égale à 4π, on a l'équation

$$\alpha\beta(\mu,\nu)\left[e^{c(\mu,\nu)} - e^{(c-2\gamma)(\mu,\nu)}\right]\mathrm{A}_{\mu,\nu} - \alpha\beta\left[e^{c(\mu,\nu)} - e^{(c-2\gamma)(\mu,\nu)}\right]\frac{d\mathrm{A}_{\mu,\nu}}{dc} = 4\pi$$

ou bien

$$(\mu,\nu)\mathrm{A}_{\mu,\nu} - \frac{d\mathrm{A}_{\mu,\nu}}{dc} = \frac{4\pi}{\alpha\beta}\,\frac{e^{(\gamma-c)(\mu,\nu)}}{e^{\gamma(\mu,\nu)} - e^{-\gamma(\mu,\nu)}}.$$

Cette équation a été obtenue par la considération de l'intégrale

$$\int\int_{\mathrm{P}}\left(\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)d\sigma,$$

où

$$\varphi = e^{\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}}}\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta} = e^{z(\mu,\nu)}\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta}.$$

Si l'on prenait

$$\varphi = e^{-\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}}}\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta} = e^{-z(\mu,\nu)}\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta},$$

en changeant le signe de $\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}}$ ou de (μ,ν), on trouverait une autre équation qui se déduirait de la précédente par le même changement de signe. Cette nouvelle équation serait

$$(\mu,\nu)\mathrm{A}_{\mu,\nu} + \frac{d\mathrm{A}_{\mu,\nu}}{dc} = \frac{4\pi}{\alpha\beta}\,\frac{e^{-(\gamma-c)(\mu,\nu)}}{e^{\gamma(\mu,\nu)} - e^{-\gamma(\mu,\nu)}}.$$

On a donc, en ajoutant ces équations membre à membre,

$$\mathrm{A}_{\mu,\nu} = \frac{2\pi}{\alpha\beta(\mu,\nu)}\,\frac{e^{(\gamma-c)(\mu,\nu)} + e^{-(\gamma-c)(\mu,\nu)}}{e^{\gamma(\mu,\nu)} - e^{-\gamma(\mu,\nu)}},$$

et en retranchant,

$$\frac{d\mathrm{A}_{\mu,\nu}}{dc} = \frac{2\pi}{\alpha\beta}\,\frac{e^{-(\gamma-c)(\mu,\nu)} - e^{(\gamma-c)(\mu,\nu)}}{e^{\gamma(\mu,\nu)} - e^{-\gamma(\mu,\nu)}},$$

expression qui est bien la dérivée de la précédente par rapport à c.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que μ et ν ne sont pas nuls tous deux. Si $\mu = \nu = 0$, on a

$$(\mu, \nu) = \pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2}} = 0;$$

alors la partie de l'intégrale

$$\int\int_{\mathrm{P}} \left(\Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n}\right) d\sigma,$$

étendue à la face supérieure du parallélépipède, est

$$-\alpha\beta \frac{d\mathrm{A}_{0,0}}{dc},$$

et la partie relative à la face inférieure

$$\alpha\beta \frac{d\mathrm{A}_{0,0}}{dc} + 4\pi,$$

ainsi qu'il résulte des expressions générales : en écrivant que la somme est égale à 4π, on obtient une identité. Il faut donc procéder autrement pour trouver $\mathrm{A}_{0,0}$ et $\frac{d\mathrm{A}_{0,0}}{dc}$.

En désignant toujours par $\varphi(x, y, z)$ la fonction

$$\varphi(x, y, z) = e^{\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2}}} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi y}{\beta}$$

et considérant l'intégrale

$$\int\int \left(\Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n}\right) d\sigma$$

étendue non plus au parallélépipède précédent, mais au parallélépipède

$$x = \pm\alpha, \qquad y = \pm\beta, \qquad z = \pm c,$$

comme l'intégrale de la page 29, on pourra refaire exactement les calculs que nous avons faits aux pages 28, 29 et suivantes, en y remplaçant a par 2α, b par 2β, et la fonction φ_2 par la fonction Ψ. On

trouvera ainsi que les coefficients $A_{\mu,\nu}$ vérifient la relation suivante, identique à la relation (27),

$$(\mu, \nu)\left[e^{c\,\mu,\nu} - e^{-c\,\mu,\nu}\right]A_{\mu,\nu} - \left[e^{c\,\mu,\nu} + e^{-c\,\mu,\nu}\right]\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc} = \frac{4\pi}{\alpha\beta},$$

(μ, ν) désignant, comme plus haut, la quantité $\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2}}$. On en conclut, pour $\mu = \nu = 0$, en réduisant le second membre au quart de sa valeur,

$$\frac{dA_{0,0}}{dc} = -\frac{\pi}{2\alpha\beta},$$

d'où

$$A_{0,0} = -\frac{\pi c}{2\alpha\beta} + C_{0,0},$$

$C_{0,0}$ désignant une constante qui ne dépend pas de c, mais uniquement des périodes 2α, 2β, 2γ. Si l'on remplace c par z dans les valeurs de $A_{\mu,\nu}$ et $A_{0,0}$ trouvées ci-dessus, on obtient le développement suivant, valable pour toutes les valeurs de z comprises entre zéro et 2γ,

$$0 < z < 2\gamma,$$

$$(37)\quad \Psi(x, y, z) = -\frac{\pi z}{2\alpha\beta} + C_{0,0} + \frac{\pi}{\alpha\beta}\sum \frac{2}{(\mu,\nu)}\,\frac{e^{(\gamma-z)(\mu,\nu)} + e^{-(\gamma-z)(\mu,\nu)}}{e^{\gamma(\mu,\nu)} - e^{-\gamma(\mu,\nu)}}\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta},$$

où (μ, ν) désigne la quantité $\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2}}$, la somme $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs de μ et ν de 0 à $+\infty$, la combinaison $\mu = \nu = 0$ exceptée, et le facteur 2 qui figure devant le terme général devant être remplacé par 1 quand l'un des entiers μ ou ν est nul.

Pour les mêmes valeurs de z, on a, pour $Z(x, y, z)$, le développement qui résulte de la relation (31)

$$(38)\quad \begin{cases} Z(x, y, z;\, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma) \\ \quad = \Psi(x, y, z) + \frac{A}{4\alpha}x^2 + \frac{B'}{4\beta}y^2 - \left(\frac{A}{4\alpha} + \frac{B'}{4\beta}\right)z^2. \end{cases}$$

Si l'on veut le développement en série trigonométrique de la fonction Ψ pour des valeurs de z non comprises entre 0 et 2γ, il suffit,

par l'application répétée de la formule

$$\Psi(x, y, z + 2\gamma) = \Psi(x, y, z) - \frac{\pi}{\alpha\beta}(z + \gamma),$$

d'exprimer la fonction $\Psi(x, y, z)$ à l'aide d'une fonction $\Psi(x, y, z')$, dans laquelle z' est compris entre o et 2γ, et d'appliquer ensuite le développement (37).

Si l'on pose, de même,

$$Z(x, y, z) = \Phi(x, y, z) + \frac{B'}{4\beta}y^2 + \frac{C''}{4\gamma}z^2 - \left(\frac{B'}{4\beta} + \frac{C''}{4\gamma}\right)x^2,$$

$$Z(x, y, z) = \Pi(x, y, z) + \frac{C''}{4\gamma}z^2 + \frac{A}{4\alpha}x^2 - \left(\frac{C''}{4\gamma} + \frac{A}{4\alpha}\right)y^2,$$

on a, pour les valeurs de x comprises entre o et 2α,

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{\pi x}{2\beta\gamma} + C'_{0,0} + \frac{\pi}{\beta\gamma}\sum \frac{2}{(\mu, \nu)'}\,\frac{e^{(\alpha-x)(\mu,\nu)'} + e^{-(\alpha-x)(\mu,\nu)'}}{e^{\alpha(\mu,\nu)'} - e^{-\alpha(\mu,\nu)'}}\cos\frac{\mu\pi y}{\beta}\cos\frac{\nu\pi z}{\gamma},$$

où

$$(\mu, \nu)' = \pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\beta^2} + \frac{\nu^2}{\gamma^2}},$$

et, pour les valeurs de y comprises entre o et 2β,

$$\Pi(x, y, z) = -\frac{\pi y}{2\gamma\alpha} + C''_{0,0} + \frac{\pi}{\gamma\alpha}\sum \frac{2}{(\mu, \nu)''}\,\frac{e^{(\beta-y)(\mu,\nu)''} + e^{-(\beta-y)(\mu,\nu)''}}{e^{\beta(\mu,\nu)''} - e^{-\beta(\mu,\nu)''}}\cos\frac{\mu\pi z}{\gamma}\cos\frac{\nu\pi x}{\alpha},$$

où

$$(\mu, \nu)'' = \pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\gamma^2} + \frac{\nu^2}{\alpha^2}}.$$

7. A l'aide des résultats précédents, on obtiendra facilement le développement en série trigonométrique d'une fonction $F(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta F = 0$, admettant les trois groupes de périodes $(2\alpha, 0, 0)$, $(0, 2\beta, 0)$, $(0, 0, 2\gamma)$ et n'ayant que des pôles dans un parallélépipède élémentaire. Cette fonction F est donc supposée véri-

fier les conditions

$$F(x+2\alpha, y, z) = F(x, y+2\beta, z) = F(x, y, z+2\gamma) = F(x, y, z).$$

Prenons pour parallélépipède élémentaire le parallélépipède dont les faces ont pour équation

$$x = 0, \qquad x = 2\alpha, \qquad y = 0, \qquad y = 2\beta, \qquad z = 0, \qquad z = 2\gamma$$

et soient

$$(x_1, y_1, z_1) \quad (x_2, y_2, z_2) \quad \ldots, \quad (x_p, y_p, z_p),$$

les pôles de la fonction F situés dans ce parallélépipède. Pour plus de simplicité, je supposerai tous ces pôles du premier degré et j'appellerai R_1, R_2, ..., R_p les résidus correspondants. Alors, comme je l'ai démontré dans le tome IV des *Acta mathematica*, page 359 et suivantes, on aura, pour l'expression de cette fonction F,

$$(39) \quad \begin{cases} F(x, y, z) = L + Mx + Ny + Pz \\ \qquad + \sum_{k=1}^{k=p} R_k Z(x-x_k, y-y_k, z-z_k), \end{cases}$$

où $Z(x, y, z)$ est la fonction définie précédemment (p. 34), et où L, M, N, P désignent des constantes dont les trois dernières ont pour valeurs

$$(40) \quad 2M\alpha = A\sum_{k=1}^{k=p} R_k x_k, \qquad 2N\beta = B'\sum_{k=1}^{k=p} R_k y_k, \qquad 2P\gamma = C''\sum_{k=1}^{k=p} R_k z_k;$$

on sait d'ailleurs que la somme des résidus

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_p$$

est *nulle*.

Proposons-nous de former le développement en série trigonométrique de la fonction $F(x, y, z)$ pour des valeurs de z voisines de 2γ, et en particulier pour $z = 2\gamma$, c'est-à-dire sur la face supérieure $z = 2\gamma$ du parallélépipède élémentaire considéré. Pour cela, conformément à

l'équation (31), nous ferons

$$Z(x, y, z) = \Psi(x, y, z) + \frac{A}{4\alpha}x^2 + \frac{B'}{4\beta}y^2 - \left(\frac{A}{4\alpha} + \frac{B'}{4\beta}\right)z^2$$

ou encore, d'après la relation

$$\frac{A}{\alpha} + \frac{B'}{\beta} + \frac{C''}{\gamma} = -\frac{\pi}{\alpha\beta\gamma},$$

$$Z(x, y, z) = \Psi(x, y, z) + \frac{A}{4\alpha}x^2 + \frac{B'}{4\beta}y^2 + \frac{C''}{4\gamma}z^2 + \frac{\pi}{4\alpha\beta\gamma}z^2.$$

On déduit de là, en remplaçant x, y, z par $x - x_k$, $y - y_k$, $z - z_k$,

$$\begin{aligned} Z(x - x_k, y - y_k, z - z_k) = \Psi(x - x_k, y - y_k, z - z_k) & \\ + \frac{A}{4\alpha}x^2 + \frac{B'}{4\beta}y^2 + \frac{C''}{4\gamma}z^2 + \frac{\pi}{4\alpha\beta\gamma}z^2 & \\ + \frac{A}{4\alpha}x_k^2 + \frac{B'}{4\beta}y_k^2 + \frac{C''}{4\gamma}z_k^2 + \frac{\pi}{4\alpha\beta\gamma}z_k^2 & \\ - \frac{A}{2\alpha}xx_k - \frac{B'}{2\beta}yy_k - \frac{C''}{2\gamma}zz_k - \frac{\pi}{2\alpha\beta\gamma}zz_k. & \end{aligned}$$

Remplaçons $Z(x - x_k, y - y_k, z - z_k)$ par cette valeur dans l'expression de la fonction $F(x, y, z)$: les termes en x^2, y^2, z^2 disparaîtront en vertu de la relation $R_1 + R_2 + \ldots + R_p = 0$; les termes en x et y disparaîtront également en vertu des relations (40); et en posant, pour simplifier,

$$Q = \sum_{k=1}^{k=p} R_k\left(\frac{A}{4\alpha}x_k^2 + \frac{B'}{4\beta}y_k^2 + \frac{C''}{4\gamma}z_k^2\right), \qquad \zeta = \frac{\pi}{4\alpha\beta\gamma}\sum_{k=1}^{k=p} R_k z_k^2,$$

puis tenant compte de la troisième des relations (40), nous aurons

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x, y, z) = L + Q + \zeta - \frac{\pi P}{\alpha\beta C''}z & \\ + \sum_{k=1}^{k=p} R_k \Psi(x - x_k, y - y_k, z - z_k). & \end{aligned} \right.$$

Comme le pôle (x_k, y_k, z_k) est dans le parallélépipède ayant pour

faces opposées $z = 2\gamma$, $z = 0$, si z est suffisamment voisin de 2γ, la différence $z - z_k$ est positive et moindre que 2γ, donc, pour des valeurs de z suffisamment rapprochées de 2γ, on pourra appliquer à $\Psi(x - x_k, y - y_k, z - z_k)$ le développement (37)

$$\Psi(x - x_k, y - y_k, z - z_k) = -\frac{\pi(z - z_k)}{2\alpha\beta} + C_{0,0}$$
$$+ \frac{\pi}{\alpha\beta}\sum \frac{2}{(\mu,\nu)} \frac{e^{(\gamma - z + z_k)(\mu,\nu)} + e^{-(\gamma - z + z_k)(\mu,\nu)}}{e^{\gamma(\mu,\nu)} - e^{-\gamma(\mu,\nu)}} \cos\frac{\mu\pi(x - x_k)}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi(y - y_k)}{\beta}.$$

En portant ce développement dans l'expression (39) de $F(x, y, z)$, on voit que la constante $C_{0,0}$ disparaît, car son coefficient est

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_p,$$

c'est-à-dire zéro, et il reste

$$F(x, y, z) = L + Q + \zeta - \frac{\pi P}{\alpha\beta C''}(z - \gamma)$$
$$+ \frac{\pi}{\alpha\beta}\sum_{\mu,\nu}\sum_{k=1}^{k=p} \frac{2R_k}{(\mu,\nu)} \frac{e^{(\gamma - z + z_k)(\mu,\nu)} + e^{-(\gamma - z + z_k)(\mu,\nu)}}{e^{\gamma(\mu,\nu)} - e^{-\gamma(\mu,\nu)}} \cos\frac{\mu\pi(x - x_k)}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi(y - y_k)}{\beta},$$

(μ, ν) ayant la valeur $\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2}}$. Nous avons ainsi un développement en série trigonométrique de $F(x, y, z)$, valable sur le plan $z = 2\gamma$ et dans tout l'espace compris entre deux plans parallèles au plan $z = 2\gamma$ situés de part et d'autre de ce plan et passant par les pôles de la fonction F les plus rapprochés de ce plan.

De même, en posant

$$\xi = \frac{\pi}{4\alpha\beta\gamma}\sum_{k=1}^{k=p} R_k x_k^2, \qquad \eta = \frac{\pi}{4\alpha\beta\gamma}\sum_{k=1}^{k=p} R_k y_k^2,$$

on a, dans le voisinage de la face $x = 2\alpha$,

$$F(x, y, z) = L + Q + \xi - \frac{\pi M}{\beta\gamma A}(x - \alpha)$$
$$+ \frac{\pi}{\beta\gamma}\sum_{\mu,\nu}\sum_{k=1}^{k=p} \frac{2R_k}{(\mu,\nu)'} \frac{e^{(\alpha - x + x_k)(\mu,\nu)'} + e^{-(\alpha - x + x_k)(\mu,\nu)'}}{e^{\alpha(\mu,\nu)'} - e^{-\alpha(\mu,\nu)'}} \cos\frac{\mu\pi(y - y_k)}{\beta} \cos\frac{\nu\pi(z - z_k)}{\gamma}.$$

où

$$(\mu, \nu)' = \pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\beta^2} + \frac{\nu^2}{\gamma^2}}$$

et, dans le voisinage de la face $y = 2\beta$,

$$F(x, y, z) = L + Q + \eta - \frac{\pi N}{\gamma\alpha B'}(y - \beta)$$
$$+ \frac{\pi}{\gamma\alpha}\sum_{\mu,\nu}\sum_{k=1}^{k=p}\frac{2R_k}{(\mu,\nu)''}\frac{e^{(\beta-y+y_k)(\mu,\nu)''}+e^{-(\beta-y+y_k)(\mu,\nu)''}}{e^{\beta(\mu,\nu)''}-e^{-\beta(\mu,\nu)''}}\cos\frac{\mu\pi(z-z_k)}{\gamma}\cos\frac{\nu\pi(x-x_k)}{\alpha},$$

où

$$(\mu, \nu)'' = \pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\gamma^2} + \frac{\nu^2}{\alpha^2}}.$$

Ces développements s'appliqueront par exemple à l'expression de la fonction de Green pour l'intérieur d'un parallélépipède rectangle, telle que je l'ai indiquée d'après Riemann, dans le tome VIII des *Acta mathematica* (p. 277) [1].

8. Comme vérification, il est possible de déduire du développement (37) celui de la fonction $\mathfrak{S}_2(x, y, z; 2\alpha, 2\beta)$, en supposant que γ augmente indéfiniment. En effet, si l'on se reporte à la série (29) qui définit $Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$, on voit que, si γ croît indéfiniment, tous les termes de cette série dans lesquels l'entier p est différent de zéro tendent vers zéro, et l'on obtient pour $\gamma = \infty$ une série à double entrée que l'on peut écrire

$$Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, \infty)$$
$$= \frac{1}{r} + \sum_{m,n}{}'\left[\frac{1}{\sqrt{(x-2m\alpha)^2+(y-2n\beta)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{4m^2\alpha^2+4n^2\beta^2}}\right]$$
$$-\sum_{m,n}{}'\left[\frac{2m\alpha x+2n\beta y}{(4m^2\alpha^2+4n^2\beta^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}\frac{3(2m\alpha x+2n\beta y)^2-(4m^2\alpha^2+4n^2\beta^2)(x^2+y^2+z^2)}{(4m^2\alpha^2+4n^2\beta^2)^{\frac{5}{2}}}\right],$$

---

[1] La transformation des fonctions Θ en fonctions $\mathfrak{S}$ employée dans les nos 1 et 3 a été également appliquée par M. Greenhill (*Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. III, p. 289) à l'intégrale définie que donne Riemann pour exprimer la fonction de Green, mais dans un but différent du nôtre.

les sommes $\sum\limits_{m,n}'$ étant étendues aux valeurs entières de m et n, de $-\infty$ à $+\infty$, la combinaison $m = n = 0$ étant exceptée. La première partie du développement ci-dessus est $\mathfrak{S}_2(x, y, z; 2\alpha, 2\beta)$; quant à la deuxième, elle est de la forme

$$\mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 - (\mathcal{A} + \mathcal{B})z^2,$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ désignant des constantes; en effet, les sommes

$$\sum_{m,n}' \frac{2m\alpha}{(4m^2\alpha^2 + 4n^2\beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\sum_{m,n}' \frac{2n\beta}{(4m^2\alpha^2 + 4n^2\beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\sum_{m,n}' \frac{4mn\alpha\beta}{(4m^2\alpha^2 + 4n^2\beta^2)^{\frac{5}{2}}}$$

sont évidemment nulles; puis, si l'on désigne par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ les constantes

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sum_{m,n}' \frac{4n^2\beta^2 - 8m^2\alpha^2}{(4m^2\alpha^2 + 4n^2\beta^2)^{\frac{5}{2}}}, \qquad \mathcal{B} = \frac{1}{2}\sum_{m,n}' \frac{4m^2\alpha^2 - 8n^2\beta^2}{(4m^2\alpha^2 + 4n^2\beta^2)^{\frac{5}{2}}},$$

la deuxième partie se réduit bien à

$$\mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 - (\mathcal{A} + \mathcal{B})z^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} &Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, \infty) \\ &\quad = \mathfrak{S}_2(x, y, z; 2\alpha, 2\beta) + \mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 - (\mathcal{A} + \mathcal{B})z^2. \end{aligned}$$

Lorsque γ augmente indéfiniment, les constantes appelées précédemment A et B′ tendent vers des limites A_1 et B'_1 et la fonction

$$\Psi(x, y, z) = Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma) - \frac{A}{4\alpha}x^2 - \frac{B'}{4\beta}y^2 + \left(\frac{A}{4\alpha} + \frac{B'}{4\beta}\right)z^2$$

tend vers une limite $\Psi_1(x, y, z)$ donnée par la formule

$$\Psi_1(x, y, z) = Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, \infty) - \frac{A_1}{4\alpha}x^2 - \frac{B'_1}{4\beta}y^2 + \left(\frac{A_1}{4\alpha} + \frac{B'_1}{4\beta}\right)z^2.$$

ou encore, d'après l'expression ci-dessus de

$$Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, \infty),$$

$$\Psi_1(x, y, z) = \mathfrak{S}_2(x, y, z; 2\alpha, 2\beta) + \left(\mathcal{A} - \frac{A_1}{4\alpha}\right)x^2 + \left(\mathcal{B} - \frac{B'_1}{4\beta}\right)y^2 - \left(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \frac{A_1}{4\alpha} - \frac{B'_1}{4\beta}\right)z^2.$$

Comme les deux fonctions $\Psi_1(x, y, z)$ et $\mathfrak{S}_2(x, y, z; 2\alpha, 2\beta)$ admettent la période 2α par rapport à x et la période 2β par rapport à y, il faut que les coefficients de x^2, y^2, z^2 dans le second membre soient nuls, car le polynôme

$$\left(\mathcal{A} - \frac{A_1}{4\alpha}\right)x^2 + \left(\mathcal{B} - \frac{B'_1}{4\beta}\right)y^2 - \left(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \frac{A_1}{4\alpha} - \frac{B'_1}{4\beta}\right)z^2$$

ne doit pas changer quand x augmente de 2α ou y de 2β; on a donc

$$\mathcal{A} - \frac{A_1}{4\alpha} = 0, \qquad \mathcal{B} - \frac{B'_1}{4\beta} = 0$$

et

$$\Psi_1(x, y, z) = \mathfrak{S}_2(x, y, z; 2\alpha, 2\beta).$$

Donc la fonction $\mathfrak{S}_2(x, y, z; 2\alpha, 2\beta)$ est la limite vers laquelle tend $\Psi(x, y, z)$ quand γ augmente indéfiniment. Nous avons trouvé pour $\Psi(x, y, z)$ le développement

$$\Psi(x, y, z) = -\frac{\pi z}{2\alpha\beta} + C_{0,0} + \frac{\pi}{\alpha\beta}\sum \frac{2}{(\mu, \nu)} \frac{e^{(\gamma-z)(\mu,\nu)} + e^{-(\gamma-z)(\mu,\nu)}}{e^{\gamma(\mu,\nu)} - e^{-\gamma(\mu,\nu)}} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi y}{\beta},$$

où

$$0 < z < 2\gamma.$$

Si γ croît indéfiniment, $C_{0,0}$ tend vers une limite $B_{0,0}$ et l'on a

$$\Psi_1(x, y, z) = \mathfrak{S}_2(x, y, z; 2\alpha, 2\beta) = -\frac{\pi z}{2\alpha\beta} + B_{0,0} + \frac{\pi}{\alpha\beta}\sum \frac{2}{(\mu, \nu)} e^{-z(\mu,\nu)} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi y}{\beta},$$

développement identique à la série (22) dans laquelle on remplacerait a par 2α et b par 2β.

9. Le développement (37) présente une grande analogie avec celui de la fonction

$$W = \log\theta(x+yi)\,\theta(x-yi).$$

En effet, en adoptant les notations de Briot et Bouquet (*Théorie des fonctions elliptiques*, p. 480), on a, d'après Jacobi,

$$D\log\theta(z) = \frac{4\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{q^{-m}-q^{m}}\sin\frac{2m\pi z}{\omega},$$

d'où

$$\log\theta(z) = A + 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m(q^{m}-q^{-m})}\cos\frac{2m\pi z}{\omega},$$

A désignant une constante. On en conclut

$$\begin{aligned}
&\log\theta(x+yi)\,\theta(x-yi)\\
&\quad = 2A + 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{2}{m(q^{m}-q^{-m})}\cos\frac{2m\pi x}{\omega}\cos\frac{2m\pi yi}{\omega}\\
&\quad = 2A + 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\,\frac{e^{\frac{2m\pi y}{\omega}}+e^{-\frac{2m\pi y}{\omega}}}{q^{m}-q^{-m}}\cos\frac{2m\pi x}{\omega};
\end{aligned}$$

l'analogie de cette série avec le développement (37) est évidente.

10. La méthode suivie dans les nos **1** et **5** permettra de trouver les développements en séries trigonométriques de fonctions de la forme

$$\sum\left[(x_1-m_1a_1)^2+(x_2-m_2a_2)^2+\ldots+(x_k-m_ka_k)^2+c^2\right]^{-p},$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières de $m_1, m_2, \ldots, m_k$ de $-\infty$ à $+\infty$, et l'exposant p ayant une valeur assez grande pour que la série soit convergente (*voyez* une Note de M. Jordan, dans le Tome IX du *Bulletin de la Société mathématique*). Il suffira de prendre pour point de départ la relation

$$\Gamma(p)\,N^{-p} = \int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-Nt}\,dt.$$

Applications de la dérivation d'Arbogast. — Formule générale pour le changement de la variable indépendante;

Par M. DAVID.

Cette petite Note doit être considérée comme la suite de celle que j'ai publiée dans le *Journal de Mathématiques,* février 1882, et elle a surtout pour objet d'ajouter aux divers problèmes, que j'ai alors résolus, une formule générale pour le changement de la variable indépendante. Les Traités de Calcul différentiel donnent bien la méthode pour obtenir ce changement; mais on est bientôt forcé de s'arrêter à cause des calculs prolixes que l'on rencontre et dans lesquels aucune loi ne se manifeste. En employant la notation d'Arbogast, on arrive à résoudre le problème dans le cas général; ce qui est une nouvelle confirmation de l'observation de Lacroix, que cette méthode a été trop peu remarquée.

Avant d'entrer dans la question elle-même, j'établirai une formule qui peut servir encore à d'autres usages.

1° D'après la formule fondamentale du Mémoire cité plus haut, on a

$$a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = (a^r + x\mathrm{D}a^r + x^2\mathrm{D}^2 a^r + \ldots)^{\frac{1}{r}}$$
$$= (a^s + x\mathrm{D}a^s + x^2\mathrm{D}^2 a^s + \ldots)^{\frac{1}{s}}.$$

En différentiant, puis divisant cette identité par celle qui résulte de

la différentiation, il vient

$$\frac{r(a^r + x\,\mathrm{D}a^r + x^2\,\mathrm{D}^2a^r + \ldots)}{\mathrm{D}a^r + 2x\,\mathrm{D}^2a^r + 3x^2\,\mathrm{D}^3a^r + \ldots} = \frac{s(a^s + x\,\mathrm{D}a^s + x^2\,\mathrm{D}^2a^s) + \ldots}{\mathrm{D}a^s + 2x\,\mathrm{D}^2a^s + 3x^2\,\mathrm{D}^3a^s + \ldots}.$$

En égalant les coefficients des puissances de $x^{\alpha-1}$, on obtient la formule

$$\Sigma(kr - hs)\,\mathrm{D}^h a^r\,\mathrm{D}^k a^s = 0,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de h et k qui satisfont à l'équation

(1) $$k + h = \alpha.$$

La formule classique du Calcul différentiel devient, en se servant de la notation d'Arbogast,

$$\mathrm{D}^\alpha a^{r+s} = \Sigma\,\mathrm{D}^h a^r\,\mathrm{D}^k a^s:$$

et en ajoutant, après avoir multiplié par une constante arbitraire t, on a la formule plus générale

(2) $$t\,\mathrm{D}^\alpha a^{r+s} = \Sigma(kr - hs + t)\,\mathrm{D}^h a^r\,\mathrm{D}^k a^s,$$

qui remplace les deux autres en donnant à t deux valeurs quelconques, principalement 0 et ∞.

2° Nous rapprocherons de celle-ci, à cause de la similitude du sujet, bien que nous n'ayons pas à nous en servir, la formule suivante :

(2 *bis*) $$\left\{\begin{aligned} &-\frac{t(r+s)}{qrs}\,\mathrm{D}^\alpha \frac{a^{\frac{qr+qs+\alpha}{p}}}{-qr-qs-\alpha} \\ &= \Sigma(kr - hs + t)\,\mathrm{D}^h \frac{a^{\frac{qr+h}{p}}}{-qr-h}\,\mathrm{D}^k \frac{a^{\frac{qs+k}{p}}}{-qs-k}, \end{aligned}\right.$$

qui paraît digne de remarque.

Il faut, dans la Note citée, se reporter à la série

$$u = a z^{\frac{p}{q}} + a_1 z^{\frac{p+1}{q}} + a_2 z^{\frac{p+2}{q}} + \ldots.$$

qui donne par l'inversion la première formule de la page 68, à savoir :

$$\frac{z^r}{-qr} = u^{\frac{qr}{p}} \frac{a^{-\frac{rq}{r}}}{-qr} + u^{\frac{qr+1}{p}} \mathrm{D} \frac{a^{-\frac{qr+1}{p}}}{-qr-1} + u^{\frac{qr+2}{p}} \mathrm{D}^2 \frac{a^{-\frac{qr+2}{p}}}{-qr-2} + \ldots;$$

on en conclut l'identité

$$z = \left(u^{\frac{qr}{p}} a^{-\frac{qr}{p}} + \frac{qr}{qr+1} u^{\frac{qr+1}{p}} \mathrm{D} a^{-\frac{qr+1}{p}} + \frac{qr}{qr+2} u^{\frac{qr+2}{p}} \mathrm{D}^2 a^{-\frac{qr+2}{p}} + \ldots \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \left(u^{\frac{qs}{p}} a^{-\frac{qs}{p}} + \frac{qr}{qs+1} u^{\frac{qs+1}{p}} \mathrm{D} a^{-\frac{qs+1}{p}} + \frac{qs}{qs+2} u^{\frac{qs+2}{p}} \mathrm{D}^2 a^{-\frac{qs+2}{p}} + \ldots \right)^{\frac{1}{s}}.$$

En la différentiant, puis la divisant par celle qui résulte de cette différentiation, on a

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{du} = \frac{u^{\frac{qr}{p}-1} a^{-\frac{qr}{p}} + u^{\frac{qr+1}{p}-1} \mathrm{D} a^{-\frac{qr+1}{p}} + u^{\frac{qr+2}{p}-1} \mathrm{D}^2 a^{-\frac{qr+2}{p}} + \ldots}{\frac{qr}{qr} u^{\frac{qr}{p}} a^{-\frac{qr}{p}} + \frac{qr}{qr+1} u^{\frac{qr+1}{p}} \mathrm{D} a^{-\frac{qr+1}{p}} + \frac{qr}{qr+2} u^{\frac{qr+2}{p}} \mathrm{D}^2 a^{-\frac{qr+2}{p}} + \ldots}$$

$$= \frac{u^{\frac{qs}{p}-1} a^{-\frac{qs}{p}} + u^{\frac{qs+1}{p}-1} \mathrm{D} a^{-\frac{qs+1}{p}} + u^{\frac{qs+2}{p}-1} \mathrm{D}^2 a^{-\frac{qs+2}{p}} + \ldots}{\frac{qs}{qs} u^{\frac{qs}{p}} a^{-\frac{qs}{p}} + \frac{qs}{qs+1} u^{\frac{qs+1}{p}} \mathrm{D} a^{-\frac{qs+1}{p}} + \frac{qs}{qs+2} u^{\frac{qs+2}{p}} \mathrm{D}^2 a^{-\frac{qs+2}{p}} + \ldots};$$

puis, en égalant les coefficients d'une même puissance de u, il vient

$$\Sigma(kr - hs)\,\mathrm{D}^h \frac{a^{-\frac{qr+h}{p}}}{-qr-h}\, \mathrm{D}^k \frac{a^{-\frac{qs+k}{p}}}{-qs-k} = 0,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières nulles et positives de h et k qui satisfont à l'équation (1). Pour l'application de cette formule à des cas particuliers, il est bon de noter l'identité suivante :

$$kr - hs = r(qs+k) - s(qr+h).$$

En dirigeant les calculs d'une autre manière, on trouve une seconde formule.

La formule rappelée ci-dessus, à savoir

$$-\frac{z^r}{qr} = u^{\frac{qr}{p}} \frac{a^{-\frac{qr}{p}}}{-qr} + u^{\frac{qr+1}{p}} \mathrm{D} \frac{a^{-\frac{qr+1}{p}}}{-qr-1} + u^{\frac{qr+2}{p}} \mathrm{D}^2 \frac{a^{-\frac{qr+2}{p}}}{-qr-2} + \dots,$$

donne par le changement de r en s, puis par le changement de r en $r+s$,

$$-\frac{z^s}{qs} = u^{\frac{qs}{p}} \frac{a^{-\frac{qs}{p}}}{-qs} + u^{\frac{qs+1}{p}} \mathrm{D} \frac{a^{-\frac{qs+1}{p}}}{-qs-1} + u^{\frac{qs+2}{p}} \mathrm{D}^2 \frac{a^{-\frac{qs+2}{p}}}{-qs-2} + \dots$$

$$-\frac{z^{r+s}}{q(r+s)} = u^{\frac{qr+qs}{p}} \frac{a^{-\frac{qr+qs}{p}}}{-qr-qs} + u^{\frac{qr+qs+1}{p}} \mathrm{D} \frac{a^{-\frac{qr+qs+1}{p}}}{-qr-qs-1} + u^{\frac{qr+qs+2}{p}} \mathrm{D}^2 \frac{a^{-\frac{qr+qs+2}{p}}}{-qr-qs-2} + \dots.$$

En multipliant les deux premières entre elles, il vient

$$\begin{aligned}\frac{z^{r+s}}{q^2rs} = {} & u^{\frac{qr+qs}{p}} \frac{a^{-\frac{qr}{p}}}{-qr} \frac{a^{-\frac{qs}{p}}}{-qs} \\ & + u^{\frac{qr+qs+1}{p}} \left[\frac{a^{-\frac{qr}{p}}}{-qr} \mathrm{D} \frac{a^{-\frac{qs+1}{p}}}{-qs-1} + \mathrm{D} \frac{a^{-\frac{qr+1}{p}}}{-qr-1} \frac{a^{-\frac{qs}{p}}}{-qs} \right] + \dots \\ & + u^{\frac{qr+qs+\alpha}{p}} \left[\frac{a^{-\frac{qr}{p}}}{-qr} \mathrm{D}^\alpha \frac{a^{-\frac{qs+\alpha}{p}}}{-qs-\alpha} \right. \\ & \qquad + \mathrm{D} \frac{a^{-\frac{qr+1}{p}}}{-qr-1} \mathrm{D}^{\alpha-1} \frac{a^{-\frac{qs+\alpha-1}{p}}}{-qs-\alpha+1} \\ & \qquad \left. + \mathrm{D}^2 \frac{a^{-\frac{qr+2}{p}}}{-qr-2} \mathrm{D}^{\alpha-2} \frac{a^{-\frac{qs+\alpha-2}{p}}}{-qs-\alpha+2} \right] + \dots.\end{aligned}$$

Comparant celle-ci avec la troisième et égalant les puissances égales de u, on trouve la formule

$$-\frac{r+s}{qrs} \mathrm{D}^\alpha \frac{a^{-\frac{qr+qs+\alpha}{p}}}{-qr-qs-\alpha} = \Sigma \mathrm{D}^h \frac{a^{-\frac{qr+h}{p}}}{-qr-h} \mathrm{D}^k \frac{a^{-\frac{qs+k}{p}}}{-qs-k}.$$

De celle-ci et de la précédente on passe facilement à la formule (2 *bis*), en les ajoutant après avoir multiplié la seconde par une constante arbitraire t indépendante de k et h, et qui reçoit principalement les valeurs o et ∞. Ce n'est qu'une manière d'écrire sous une forme unique les deux équations comprises dans (2 *bis*).

La notation différentielle donnerait bien aussi les mêmes formules (2) et (2 *bis*), mais dans une forme plus compliquée.

3° Revenons au changement de variable indépendante dont il s'agit.

z étant une fonction de x et par suite x une fonction de z, nous posons, pour abréger,

$$a_1 = \frac{dz}{dx}, \qquad a_2 = \frac{d^2 z}{1.2\,dx^2}, \qquad a_3 = \frac{d^3 z}{1.2.3\,dx^3}, \qquad \cdots$$

et, avec le changement de variable,

$$b_1 = \frac{dx}{dz}, \qquad b_2 = \frac{d^2 x}{1.2\,dz^2}, \qquad b_3 = \frac{d^3 x}{1.2.3\,dz^3}, \qquad \cdots;$$

et à la place de l'équation

$$\frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{dz} = 1$$

nous écrivons

$$a_1 b_1 = 1,$$

dans laquelle a_1 est une fonction de x et b_1 une fonction de z.

En différentiant par rapport à x, il vient

$$(3) \quad \frac{a_1}{[n-1]}\,\frac{d^{n-1} b_1}{dx^{n-1}} + \frac{2a_2}{[n-2]}\,\frac{d^{n-2} b_1}{dx^{n-2}} + \frac{3a^3}{[n-3]}\,\frac{d^{n-3} b_1}{dx^{n-3}} + \ldots = 0;$$

les expressions $[n-1]$, $[n-2]$,... désignant les factorielles

$$1.2.3\ldots(n-1), \quad 1.2.3\ldots(n-2).$$

D'après le théorème des fonctions de fonctions (p. 67 du Mémoire

cité), on a

$$\frac{1}{\lfloor n \rfloor}\frac{d^n b_1}{dx^n} = \frac{d^n b_1}{dz}\frac{a_1^n}{\lfloor n \rfloor} + \frac{d^{n-1} b_1}{dz^{n-1}}\,\mathrm{D}\,\frac{a_1^{n-1}}{\lfloor n-1 \rfloor} + \frac{d^{n-2} b_1}{dz^{n-2}}\,\mathrm{D}^2\,\frac{a_1^{n-2}}{\lfloor n-2 \rfloor} + \ldots$$

ou bien, par les notations ci-dessus,

$$\frac{1}{\lfloor n \rfloor}\frac{d^n b_1}{dx^n} = (n+1)\,b_{n+1}\,a_1^n + n b_n\,\mathrm{D}\,a_1^{n-1} + (n-1)\,b_{n-1}\,\mathrm{D}^2 a_1^{n-2} + \ldots.$$

La substitution dans l'équation (3) donne ensuite

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & n b_n a_1^n + (n-1) b_{n-1} (a_1 \mathrm{D} a_1^{n-2} + 2 a_2 a_1^{n-2}) \\ & \qquad + (n-2) b_{n-2} (a_1 \mathrm{D}^2 a_1^{n-3} + 2 a_2 \mathrm{D} a_1^{n-3} + 3 a_3 a_1^{n-3}) + \ldots = 0. \end{aligned} \right.$$

Maintenant j'emploie la formule (2) qui équivaut, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, à deux autres équations, à savoir : en faisant

$$t = 0, \qquad r = 1, \qquad s = n - p - 1, \qquad \alpha = p,$$

à l'équation

$$\Sigma\,[p - (n-p)h]\,\mathrm{D}^h a\,\mathrm{D}^{p-h} a^{n-p-1} = 0,$$

et en faisant

$$t = \infty, \qquad r = 1, \qquad s = n - p - 1, \qquad \alpha = p,$$

à l'équation

$$\mathrm{D}^p a^{n-p} = \Sigma\,\mathrm{D}^h a\,\mathrm{D}^{p-h} a^{n-p-1}.$$

En retranchant ces deux équations l'une de l'autre, après avoir multiplié la deuxième par n et changé a en a_1, il vient

$$n\,\mathrm{D}^p a_1^{n-p} = (n-p)\,\Sigma\,(1+h)\,\mathrm{D}^h a_1\,\mathrm{D}^{p-h} a_1^{n-p-1},$$

puis

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^p a_1^{n-p} &= \frac{n-p}{n}\,\Sigma\,(1+h)\,a_{1+h}\,\mathrm{D}^{p-h} a_1^{n-p-1} \\ &= \frac{n-p}{n}\,[a_1 \mathrm{D}^p a_1^{n-p-1} + 2 a_2 \mathrm{D}^{p-1} a_1^{n-p-1} + 3 a_3 \mathrm{D}^{p-2} a_1^{n-p-1} + \ldots]. \end{aligned}$$

Par là l'équation (4) s'écrit

$$b_n a_1^n + b_{n-1} \mathrm{D} a_1^{n-1} + b_{n-2} \mathrm{D}^2 a_1^{n-2} + \ldots = 0; \tag{5}$$

c'est la généralisation de la formule $a_1 b_1 = 1$ pour les différentiations d'ordre supérieur.

En faisant successivement dans celle-ci

$$n = 1, \qquad n = 2, \qquad n = 3, \qquad \ldots,$$

on a les équations

$$\left\{\begin{array}{l} b_1 a_1 = 1, \\ b_1 \mathrm{D}\, a_1 + b_2 a_1^2 = 0, \\ b_1 \mathrm{D}^2 a_1 + b_2 \mathrm{D}_1^2 + b_3 a_1^3 = 0, \\ b_1 \mathrm{D}^3 a_1 + b_2 \mathrm{D}^2 a_1^2 + b_3 \mathrm{D} a_1^3 + b_4 a_1^4 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right. \tag{6}$$

d'où l'on tire sous forme de déterminant, par exemple pour $n = 5$,

$$b_5 = \frac{(-1)^{5-1}}{a_1^{\frac{5.6}{2}}} \begin{vmatrix} \mathrm{D}\, a_1 & a_1^2 & 0 & 0 \\ \mathrm{D}^2 a_1 & \mathrm{D}\, a_1^2 & a_1^3 & 0 \\ \mathrm{D}^3 a_1 & \mathrm{D}^2 a_1^2 & \mathrm{D}\, a_1^3 & a_1^4 \\ \mathrm{D}^4 a_1 & \mathrm{D}^3 a_1^2 & \mathrm{D}^2 a_1^3 & \mathrm{D} a_1^4 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

La loi est assez évidente pour qu'il soit inutile d'écrire le déterminant sous la forme générale. C'est la formule pour le changement de la variable indépendante qui a été annoncée.

Remarque. — Il est peut-être bon, pour abréger d'autres calculs analogues, de mettre en évidence la solution des équations suivantes dont on s'est servi pour former le déterminant (7).

Les équations données étant

$$\begin{array}{l} xa = 1, \\ xa_1 + yb_1 = 0, \\ xa_2 + yb_2 + zc_2 = 0, \\ xa_3 + yb_3 + zc_3 + vd_3 = 0, \\ xa_4 + yb_4 + zc_4 + vd_4 + ue_4 = 0, \end{array}$$

on sait, par la règle connue, que les inconnues x, y, z, v, u sont données par les formules

$$x = \frac{X}{D}, \qquad y = \frac{Y}{D}, \qquad z = \frac{Z}{D}, \qquad v = \frac{V}{D}, \qquad u = \frac{U}{D},$$

les déterminants X, Y, Z, V, U, D étant mis sous la forme symbolique

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix}, \qquad X = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix},$$

$$Y = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & c_3 & d_3 & 0 \\ a_4 & 0 & c_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix}, \qquad Z = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 & d_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & d_4 & e_4 \end{vmatrix},$$

$$V = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 0 & e_4 \end{vmatrix}, \qquad U = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & 0 \end{vmatrix},$$

ou, plus simplement,

$$D = ab_1c_2d_3e_4. \qquad X = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ b_3 & c_3 & d_3 & 0 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix},$$

$$
Y = -\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & c_2 & 0 & 0 \\ a_3 & c_3 & d_3 & 0 \\ a_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix}, \qquad Z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & d_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix},
$$

$$
V = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & e_4 \end{vmatrix}, \qquad U = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.
$$

Ceci suppose qu'il y a cinq équations données; pour un plus grand nombre, il n'y a qu'à observer la loi que suivent les déterminants X, Y, ...

Considérons maintenant les divers systèmes d'équations

$$
(8) \quad \left\{ \begin{array}{l|l|l|} xa = 1 & xa = 1 & xa = 1 \\ & xa_1 + vb_1 = 0 & xa_1 + yb_1 = 0 \\ & & xa_2 + yb_2 + zc_2 = 0 \end{array} \right. \ldots,
$$

les valeurs des x, y, z, ... sont données respectivement par les formules

$$
x = \frac{1}{a}, \qquad y = -\frac{a_1}{ab_1}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{a\, b_1\, c_2},
$$

$$
v = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{a\, b_1\, c_2\, d_3}, \qquad u = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{a\, b_1\, c_2\, d_3\, e_4}.
$$

La comparaison des équations (8) avec les équations (6) donne

$$
b_1 = \frac{1}{a_1}, \qquad b_2 = -\frac{Da_1}{a_1^3}, \qquad b_3 = \frac{1}{a_1^6}\begin{vmatrix} D\,a_1 & a_1^2 \\ D^2 a_1 & D^2 a_1^2 \end{vmatrix},
$$

$$b_4 = -\frac{1}{a_1^{10}}\begin{vmatrix} \mathrm{D}\,a_1 & a_1^2 & 0 \\ \mathrm{D}^2 a_1 & \mathrm{D}\,a_1^2 & a_1^3 \\ \mathrm{D}^3 a_1 & \mathrm{D}^2 a_1^2 & \mathrm{D}\,a_1^3 \end{vmatrix}$$

et enfin

$$b_5 = \frac{(-1)^{5-1}}{a_1^{\frac{5\cdot 6}{2}}}\begin{vmatrix} \mathrm{D}\,a_1 & a_1^2 & 0 & 0 \\ \mathrm{D}^2 a_1 & \mathrm{D}\,a_1^2 & a_1^3 & 0 \\ \mathrm{D}^3 a_1 & \mathrm{D}^2 a_1^2 & \mathrm{D}\,a_1^3 & a_1^4 \\ \mathrm{D}^4 a_1 & \mathrm{D}^3 a_1^2 & \mathrm{D}^2 a_1^3 & \mathrm{D}\,a_1^4 \end{vmatrix},$$

ce qui est la formule (7).

Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact;

PAR M. L. AUTONNE.

INTRODUCTION.

Dans une série de Communications présentées à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, années 1884 et 1885) et dans deux Mémoires insérés dans le *Journal de Mathématiques* (1885 et 1886), j'ai énuméré et construit les groupes d'ordre fini, contenus dans les groupes quadratique et cubique Cremona. Je me propose actuellement (¹) d'étendre le même genre de recherches aux substitutions birationnelles, où ne figure plus une seule série de trois variables homogènes x_i (coordonnées d'un point x du plan), mais encore une seconde série de trois variables homogènes u_i (coordonnées d'une droite u du plan), $i = 1, 2, 3$.

Parmi les substitutions de ce genre, les plus importantes sont, comme on le sait, les substitutions de contact (S. LIE, *Math. Ann.*, t. VIII; CLEBSCH-LINDEMANN, *Leçons sur la Géométrie*, t. III, etc.), qui ont le contact des figures pour propriété invariante. Ces substitutions changeant une équation différentielle du premier ordre H en une

(¹) Un résumé des présentes recherches a paru dans les *Comptes rendus*, le 8 février 1886.

autre H′, changent aussi les intégrales de H en les intégrales de H′. C'est là l'intérêt de ces substitutions en Analyse.

Le présent Travail est divisé en deux Parties.

Dans la première Partie, j'établis le théorème suivant :

Théorème. — *Pour qu'une substitution rationnelle de la forme*

$$\left|\begin{matrix} x_i & \varphi_i(\overset{p}{x}, \overset{q}{u}) \\ u_i & \psi_i(\overset{r}{x}, \overset{s}{u}) \end{matrix}\right| \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où φ_i et ψ_i sont des polynômes homogènes, dans lesquels les x_i et les u_i entrent aux dimensions marquées par les entiers p, q, r, s soit de contact, il faut et il suffit que les six quantités

$$\sum_i \psi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} - \lambda u_j \qquad \text{et} \qquad \sum_i \psi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j} - \mu x_j, \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

s'annulent identiquement en même temps que

$$\sum_i u_i x_i = 0,$$

λ et μ étant deux facteurs convenablement choisis.

Cette proposition n'est d'ailleurs qu'une généralisation des conditions données par Meyer (*Math. Ann.*, t. VIII, p. 305, et Clebsch-Lindemann, t. III, p. 463).

Je trouve ensuite que, si un des entiers p, q, r, s est zéro ou un, une substitution birationnelle de contact ne peut avoir que l'une des deux formes suivantes :

Forme monistique. — On a la substitution

$$\left|\begin{matrix} x_i & \varphi_i(x) \\ u_i & \sum_j u_j \Phi_{ij}(x) \end{matrix}\right| \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

où les fonctions φ_i définissent une substitution Cremona

$$\left| t_i \quad \varphi_i(t) \right|,$$

et où $\Phi_{ij}(x)$ désigne le coefficient de $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ dans le développement du jacobien des φ_i.

Forme dualistique. — On a la substitution

$$\mathrm{T} = \left| \begin{matrix} x_i & \varphi_i(u) \\ u_i & \sum_j x_i \Phi_{ij}(u) \end{matrix} \right|,$$

qui ne diffère de la forme précédente qu'en ce que u_i remplace x_i dans φ_i et Φ_{ij}.

Dans le cas particulier où aucun des quatre entiers p, q, r, s ne dépasse l'unité, je dis que la substitution est *linéaire*. Une substitution linéaire monistique est de la forme

$$(1) \qquad \left| \begin{matrix} x_i & \sum_j a_{ij} x_j \\ u_i & \sum_j \alpha_{ij} u_j \end{matrix} \right| \qquad (a_{ij} = \text{const.}),$$

où α_{ij} désigne le coefficient de a_{ij} dans le développement du déterminant des a_{ij}; une substitution linéaire dualistique est

$$(2) \qquad \left| \begin{matrix} x_i & \sum_j b_{ij} u_j \\ u_i & \sum_j \beta_{ij} x_j \end{matrix} \right| \qquad (b_{ij} = \text{const.}),$$

β_{ij} ayant le même rôle par rapport aux b_{ij} que α_{ij}, par rapport aux a_{ij}.

Il n'est pas nouveau que les substitutions linéaires (1) et (2) sont de contact, mais la réciproque n'avait pas été démontrée jusqu'ici, à notre connaissance.

Après avoir défini la composition des substitutions de contact, j'établis dans la seconde Partie la proposition suivante :

Théorème. — Tout *groupe* G *linéaire de contact et d'ordre fini s'obtient en combinant la substitution dualistique unique*

$$\left| \begin{matrix} x_i & u_i \\ u_i & x_i \end{matrix} \right|,$$

qui échange simplement les deux séries de variables, avec un groupe g formé exclusivement d'un nombre fini de substitutions monistiques.

Soient

$$\left| \begin{matrix} x_i & \sum_j a_{ij} x_j \\ u_i & \sum_j \alpha_{ij} u_j \end{matrix} \right|$$

les diverses substitutions monistiques de g; nous trouvons que, pour que g soit d'ordre fini, il faut et il suffit que les collinéations

$$\left| \begin{matrix} t_i & \sum_j a_{ij} t_j \end{matrix} \right|$$

forment un groupe Γ d'ordre fini. Le groupe Γ est par conséquent connu, puisqu'il est l'un des *groupes linéaires d'ordre fini* de M. Jordan (*Journal de Crelle*, t. 84, etc.).

Le groupe linéaire G de contact et d'ordre fini se trouve ainsi construit et notre théorie est complète.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Prenons la terminologie usitée dans l'Ouvrage de Clebsch-Lindemann (*Leçons sur la Géométrie*, t. III, *Connexes*). Appelons

élément (x, u) du plan le système formé par un point x, de coordonnées x_i, et une droite u, de coordonnées u_i $(i = 1, 2, 3)$. L'élément est *principal*, si la droite u passe par le point x, c'est-à-dire si

$$\omega = \sum_i u_i x_i = 0.$$

Considérons deux éléments principaux infiniment voisins (x, u) et $(x + dx, u + du)$; ils seront en *situation réunie*, si l'on a

$$\sum_i u_i dx_i = \sum_i x_i du_i = 0.$$

Une substitution S est *de contact* si à deux éléments principaux infiniment voisins et en situation réunie *quelconques*

$$(x, u) \quad \text{et} \quad (x + dx, u + du)$$

S substitue deux éléments

$$(y, v) \quad \text{et} \quad (y + dy, v + dv)$$

aussi principaux, infiniment voisins et en situation réunie. L'importance des substitutions de contact consiste surtout, comme on sait, en ce que, si une substitution de contact S transforme une équation différentielle du premier ordre H en une autre H′, S transforme aussi les intégrales de H en celles de H′.

Définition. — Si l'on a identiquement, en désignant par A, B, C trois formes en x_i et u_i,

$$A = B + C\omega, \qquad \omega = \sum u_i x_i,$$

nous écrirons

$$A \equiv B \pmod{\omega}.$$

Je ne m'occuperai dans la suite que de substitutions *rationnelles* de contact, que l'on peut évidemment d'ailleurs supposer toujours entières, sans restreindre la généralité.

2. Considérons la substitution

$$\mathrm{S} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ u_i & v_i \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(\overset{p}{x}, \overset{q}{u}) \\ u_i & \psi_i(\overset{r}{x}, \overset{s}{u}) \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où l'on a désigné par

$\varphi_i(\overset{p}{x}, \overset{q}{u})$ une forme de dimension p en x_i et q en u_i,
$\psi_i(\overset{r}{x}, \overset{s}{u})$ » r s » .

Il vient la proposition :

Théorème. — *Pour que la substitution* S *soit de contact, il faut et il suffit que l'on ait les six relations*

$$(1) \qquad \sum_i \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \lambda u_j \qquad (\mathrm{mod}\,\omega),$$

$$(2) \qquad \sum_i \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} = \mu x_j \qquad (\mathrm{mod}\,\omega), \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

I. *Les conditions sont nécessaires.* Si la substitution S est de contact les relations

$$(3) \qquad \sum_i \varphi_i \psi_i = \sum_i \psi_i \, d\varphi_i = \sum_i \varphi_i \, d\psi_i = 0$$

doivent être satisfaites en même temps que

$$(4) \qquad \sum_i u_i x_i = \sum_i u_i \, dx_i = \sum_i x_i \, du_i = 0.$$

Cela exige d'abord

$$(5) \qquad \sum_i \varphi_i \psi_i = 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\omega).$$

En second lieu

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_i \psi_i \, d\varphi_i &= \sum_i \psi_i \sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j + \sum_i \psi_i \sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} du_j \\ &= \sum_j dx_j \sum_i \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \sum_j du_j \sum_i \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}. \end{aligned} \right.$$

Appelons k, de coordonnées k_i, un point *quelconque* de la droite u, et l une droite *quelconque*, passant par le point x. Entre les six coordonnées k_i, l_i de k et de l existeront, deux et seulement deux relations

$$(7)\qquad \sum_i k_i u_i = \sum_i l_i x_i = 0.$$

D'ailleurs, en vertu de (4) et (7),

$$dx_i = \alpha x_i + a k_i, \qquad du_i = \beta u_i + b l_i,$$

les quatre facteurs a, α, b, β étant tout à fait indépendants les uns des autres.

Par suite (6) devient

$$(6')\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_i \psi_i \, d\varphi_i = a \sum_j k_j \sum_i \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + b \sum_j l_j \sum_i \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \\ + (p\alpha + q\beta) \sum_i \varphi_i \psi_i. \end{aligned} \right.$$

En vertu de (3) et (5), on a séparément, puisque a et b sont des facteurs indépendants,

$$(7')\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_j k_j \sum_i \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} &\equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} \omega), \\ \sum_j l_j \sum_i \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} &\equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} \omega), \end{aligned} \right\} \text{ sous le bénéfice de (4).}$$

Les relations (7′) ne pouvant être distinctes de (7), on a, en dési-

gnant par λ et μ deux facteurs de proportionnalité,

$$\left.\begin{aligned} \sum_i \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} &= \lambda u_j \\ \sum_i \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} &= \mu x_j \end{aligned}\right\} \pmod{\omega} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

II. *Les conditions sont suffisantes.* Pour le démontrer, il suffit de faire voir que, si (1) et (2) sont vérifiées, les relations (3) et (5) résultent de (4). Cela est évident pour la seconde des relations (3) en vertu de ce qui précède.

De (1) on tire

$$\sum_j x_j \sum_i \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = p \sum_i \varphi_i \psi_i = \lambda \sum_j x_j u_j \equiv 0 \pmod{\omega},$$

c'est-à-dire (5).

Différentions (5), qui peut s'écrire aussi

$$\sum_i \varphi_i \psi_i = \mathrm{M}\omega,$$

il viendra, sous le bénéfice de (4),

$$\sum_i \varphi_i \, d\psi_i + \sum_i \psi_i \, d\varphi_i \equiv \mathrm{M}\left[\sum_i u_i \, dx_i + \sum_i x_i \, du_i\right] \pmod{\omega},$$

c'est-à-dire

$$\sum_i \varphi_i \, d\psi_i \equiv 0 \pmod{\omega}.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Il résulte de là que le système (1) et (2) entraîne aussi l'existence du système

$$\left.\begin{aligned} &(1') \qquad \sum_i \varphi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} = \lambda' u_j, \\ &(2') \qquad \sum_i \varphi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j} = \mu' x_j, \end{aligned}\right\} \pmod{\omega} \quad (^1).$$

---

(1) Ma démonstration diffère de celle de Mayer (*Mathematische Annalen*.

3. On peut évidemment sans changer, au point de vue géométrique, la substitution S remplacer

$$\varphi_i \text{ par } a\varphi_i + \alpha_i\omega \quad \text{et} \quad \psi_i \text{ par } b\psi_i + \beta_i\omega,$$

a, b, α_i, β_i étant quelconques. Un calcul aisé montre que ce remplacement laisse subsister (1) et (2), en changeant toutefois la valeur des facteurs λ et μ. Quant à la légitimité du remplacement ci-dessus indiqué, elle résulte de ce que je ne m'occupe du déplacement par S que des éléments principaux.

4. Théorème. — *Si l'une des deux séries de variables x_i ou u_i entre linéairement dans l'une des deux séries de fonctions φ_i et ψ_i, qui définissent* S, *supposée de contact, cette même série de variables manque dans l'autre série de fonctions.*

Soit, par exemple, une substitution de contact

$$S = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\left(\overset{p}{x}, \overset{q}{u}\right) \\ u_i & \psi_i\left(\overset{r}{x}, \overset{1}{u}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\left(\overset{p}{x}, \overset{q}{u}\right) \\ u_i & \sum\limits_j u_j \mathrm{P}_{ij}\left(\overset{r}{x}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ u_i & v_i \end{vmatrix}.$$

Une des conditions de contact est (2)

$$(1) \qquad \sum_i \varphi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j} = \sum_i \varphi_i \mathrm{P}_{ij}\left(\overset{r}{x}\right) = \mu' x_j.$$

Supposons le déterminant des $\mathrm{P}_{ij}\left(\overset{r}{x}\right)$ $\left(\text{déterminant fonctionnel des dérivées } \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}\right)$ différent de zéro, on tire de (1)

$$\varphi_i = \mu' f_i(x),$$

ce qui démontre le théorème.

---

t. VIII, p. 305, et *Clebsch-Lindemann*, t. III, p. 463) en ce que, au lieu de considérer les six variables x_i, u_i comme indépendantes, je les considère comme liées par (4). Pour passer de mes résultats à ceux de Mayer, il suffit d'annuler dans (1) ou (2) λ ou μ.

Si le déterminant des P_{ij} était identiquement nul [ou $\equiv 0 \pmod{\omega}$), puisque u_i ne figure pas dans ce déterminant], on aurait, en désignant par $\varpi_i(x)$ des formes en x_i convenablement choisies,

$$\sum_i \varpi_i(x) v_i = \sum_i \varpi_i(x) \psi_i = \sum_i \varpi_i(x) \sum_j u_j P_{ij}(\overset{r}{x})$$
$$= \sum_j u_j \sum_i \varpi_i(x) P_{ij}(\overset{r}{x}) = 0,$$

indépendamment des u_i. Quand u, par conséquent, tourne autour du point x, la droite v (ou ψ) tourne autour du point ϖ, ayant pour coordonnées $\varpi_i(x)$; mais (**1**) le point y est l'intersection des droites v et $v + dv$: donc le point y (ou φ) coïncide avec ϖ; $\varpi_i(x)$ est indépendant des u_i et le théorème est démontré.

Si enfin tous les mineurs du déterminant des P_{ij} étaient nuls, on aurait $\psi_i = a_i \Psi$, ($a_i =$ const.); la droite v serait fixe, quand l'élément principal (x, u) se déplacerait dans le plan. Les ∞^3 éléments principaux du plan se transformeraient en les ∞ éléments principaux formés par la droite fixe v et un point mobile y sur cette dernière. C'est un cas que nous excluons par hypothèse.

Du théorème résulte ce corollaire évident, que nous donnerons sans démonstration :

Corollaire. — *Si dans l'expression de la substitution de contact* S, *donnée plus haut* (2°), *l'un des quatre entiers* p, q, r, s *est l'unité,* S *ne peut avoir que deux formes distinctes :*

$$S = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(\overset{p}{x}) \\ u_i & \sum_j u_j P_{ij}(\overset{r}{x}) \end{vmatrix}, \qquad s = 1, \qquad q = 0 \text{ (forme } \textit{monistique}\text{)},$$

$$S = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(\overset{q}{u}) \\ u_i & \sum_j x_j Q_{ij}(\overset{s}{u}) \end{vmatrix}, \qquad r = 1, \qquad p = 0 \text{ (forme } \textit{dualistique}\text{)}.$$

5. Considérons maintenant des substitutions de contact biration-

nelles. Soit S une pareille substitution, étant par hypothèse monistique,

$$S = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\binom{p}{x} \\ u_i & \sum_i u_j P_{ij}\binom{r}{x} \end{vmatrix};$$

il est bien évident que la substitution ternaire

$$\tau = \begin{vmatrix} t_i & \varphi_i\binom{p}{t} \end{vmatrix}$$

est une substitution Cremona d'ordre p.

La substitution S étant de contact, on a (**2**), en posant

$$\psi_i = \sum_i u_j P_{ij}\binom{r}{x},$$

la relation

$$(1) \qquad \sum_i \psi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \equiv \mu u_j \quad (\mathrm{mod}\,\omega) \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Le déterminant Φ des $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$ est le jacobien du réseau de τ [*voir* mes deux Mémoires *Sur les groupes Cremona* (*Journal de Mathématiques*, 1885 et 1886)] et ne saurait être $\equiv 0 (\mathrm{mod}\,\omega)$, c'est-à-dire identiquement nul, puisque u_i ne figure pas dans Φ. On peut résoudre le système (1) par rapport aux ψ_i et l'on en tire

$$\psi_i \equiv \mu \sum_i u_j \Phi_{ij}, \qquad \text{d'où} \qquad P_{ij}\binom{r}{x} = \Phi_{ij},$$

en désignant par Φ_{ij} le coefficient de $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$ dans le développement du déterminant Φ, d'où

$$r = 2(p-1),$$

$$S = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\binom{p}{x} \\ u_i & \sum_i u_j \Phi_{ij}\binom{2(p-1)}{x} \end{vmatrix}.$$

6. On démontrera absolument de la même façon qu'une substitution de contact birationnelle et dualistique est de forme

$$\mathrm{T} = \left| \begin{matrix} x_i & \overset{q}{\varphi_i(u)} \\ u_i & \sum_j x_j \overset{2(q-1)}{\Phi_{ij}(u)} \end{matrix} \right|,$$

Φ_{ij} étant le coefficient de $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$ dans le développement du déterminant Φ des $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$; la substitution ternaire

$$| \, t_i \quad \varphi_i(t) \, |$$

est d'ailleurs aussi une substitution Cremona.

7. Appelons *linéaire* une substitution de contact S dans laquelle aucun des quatre entiers p, q, r, s ne dépasse l'unité. Une substitution linéaire de contact ne peut être (**4**) que monistique (**5**) ou dualistique (**6**). Si la substitution linéaire est monistique, on a évidemment

$$p = 1, \qquad 2(p-1) = 0;$$

si la substitution linéaire est dualistique

$$q = 1, \qquad 2(q-1) = 0.$$

En résumé, une substitution linéaire monistique a est de la forme

$$a = \left| \begin{matrix} x_i & \sum_j a_{ij} x_j \\ u_i & \sum_j \alpha_{ij} u_j \end{matrix} \right|, \qquad a_{ij} = \text{const.} \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

α_{ij} étant le coefficient de a_{ij} dans le développement du déterminant des a_{ij}, c'est-à-dire l'élément du système adjoint au système des a_{ij}.

De même, une substitution linéaire dualistique de contact b sera

$$b = \begin{vmatrix} x_i & \sum_j b_{ij} u_j \\ u_i & \sum_j \beta_{ij} x_j \end{vmatrix}, \qquad b_{ij} = \text{const.} \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

β_{ij} jouant le même rôle par rapport aux b_{ij} que α_{ij} par rapport aux a_{ij}.

8. Appelons A la collinéation des a_{ij},

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

et A′ la collinéation *transposée* des a_{ji}:

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

la collinéation des α_{ij}

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

sera évidemment A'^{-1}.

Cela posé, appelons $A(t)$ l'être géométrique (droite ou plan) qui a pour coordonnées les transformées par la collinéation A des coordonnées t_i de l'être t. La substitution linéaire et monistique de contact a (**7**) pourra s'écrire, d'après la définition précédente,

$$a = \begin{vmatrix} x & A(x) \\ u & A'^{-1}(u) \end{vmatrix}.$$

et la substitution dualistique b,

$$b = \begin{vmatrix} x & B(u) \\ u & B'^{-1}(x) \end{vmatrix}.$$

Les collinéations A, B, ... seront les collinéations *directrices* des substitutions linéaires a, b, ...

Remarque. — Un calcul aisé montre que

$$(AB)' = B'A';$$

en d'autres termes, le *transposé d'un produit de collinéations est égal au produit des transposées prises en ordre inverse.*

9. Soient deux substitutions rationnelles de contact

$$S = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x, u) \\ u_i & \psi_i(x, u) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad S' = \begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(x, u) \\ u_i & \psi'_i(x, u) \end{vmatrix};$$

conformément à des conventions que j'ai déjà faites à propos des substitutions Cremona (*Journal de Mathématiques*, p. 433; 1885), la substitution

$$\begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(\varphi, \psi) \\ u_i & \psi'_i(\varphi, \psi) \end{vmatrix}$$

sera, *par définition*, le *produit* S'S *de* S' *par* S.

Sur la forme même des substitutions linéaires de contact (**7** et **8**), on voit immédiatement que :

1° Une substitution linéaire de contact est birationnelle;

2° Que le produit de deux substitutions linéaires de contact est aussi une substitution linéaire de contact.

Je pourrai, par suite, parler légitimement des *groupes linéaires de contact*, formés de substitutions de la forme a et b (**7** et **8**).

Dans ce qui suit, il n'est question que des substitutions linéaires de contact; pour abréger, j'appellerai simplement *monistique* et *dualistique* la substitution de la forme a et b (**8**).

DEUXIÈME PARTIE.

10. Soient

$$a = \begin{vmatrix} x & A(x) \\ u & A'^{-1}(u) \end{vmatrix}, \qquad b = \begin{vmatrix} x & B(x) \\ u & B'^{-1}(u) \end{vmatrix}, \qquad \dots$$

des substitutions monistiques et

$$c = \begin{vmatrix} x & C(u) \\ u & C'^{-1}(x) \end{vmatrix}, \qquad d = \begin{vmatrix} x & D(u) \\ u & D'^{-1}(x) \end{vmatrix}, \qquad \dots$$

des substitutions dualistiques.

Les règles données plus haut (**9**), pour la multiplication des substitutions, et un calcul aisé montrent que l'on a

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} ab = \begin{vmatrix} x & AB(x) \\ u & A'^{-1}B'^{-1}(u) \end{vmatrix}, & cd = \begin{vmatrix} x & CD'^{-1}(x) \\ u & C'^{-1}D(u) \end{vmatrix}, \\ a^{-1} = \begin{vmatrix} x & A^{-1}(x) \\ u & A'(u) \end{vmatrix}, & c^{-1} = \begin{vmatrix} x & C'(u) \\ u & C^{-1}(x) \end{vmatrix}, \\ ac = \begin{vmatrix} x & AC(u) \\ u & A'^{-1}C'^{-1}(x) \end{vmatrix}, & c^{-1}ac = \begin{vmatrix} x & C'A'^{-1}C'^{-1}(x) \\ u & C^{-1}AC(u) \end{vmatrix}. \end{array} \right.$$

Lemme I. — *Soit G un groupe linéaire de contact. Les substitutions monistiques contenues dans G forment un groupe g, contenu dans G et permutable à ses substitutions.*

Ce lemme résulte immédiatement des égalités (1).

Lemme II. — *Le groupe G résulte de la combinaison du groupe monistique g avec une seule substitution dualistique t.*

Soit une seconde substitution dualistique τ de G; le produit $\tau t^{-1} = s$ sera monistique et contenu dans g, ainsi qu'il résulte des égalités (1): donc $\tau = st$. C. Q. F. D.

Il résulte de là que g contient la moitié des substitutions de G; donc :

Lemme III. — *Pour qu'un groupe linéaire de contact* G *soit d'ordre fini, il faut et il suffit que le groupe g, formé par les substitutions monistiques de* G, *soit lui-même d'ordre fini.*

Les égalités (1) montrent que le groupe monistique g est isomorphe sans mériédrie au groupe *directeur* Γ, dérivé des collinéations directrices des substitutions de g; par suite :

Théorème. — *Pour qu'un groupe linéaire de contact* G *soit d'ordre fini, il faut et il suffit que le groupe* Γ, *formé par les collinéations directrices des substitutions monistiques de* G, *soit lui-même d'ordre fini.*

Le groupe Γ est l'un des groupes de M. Jordan (*voir* pour le Tableau de ses groupes le Tome 84 du *Journal de Crelle* ou mon Mémoire, inséré dans le LIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 134). Le groupe monistique g se trouve immédiatement construit dès qu'on se donne Γ. Pour construire G, il reste à construire la substitution dualistique unique

$$t = \begin{vmatrix} x & T(u) \\ u & T'^{-1}(x) \end{vmatrix},$$

qui se combine à g pour former G.

11. Appelons H', groupe *transposé* d'un groupe H de collinéations, le groupe formé par les transposées des collinéations (**8**) de H; désignons de même par $p^{-1}Hp$ le groupe transformé, par la collinéation p, du groupe H.

Lemme. — *Tout groupe* Γ, *de M. Jordan, coïncide avec son transposé.*

Nous supposerons, bien entendu, que le groupe Γ est général, c'est-

à-dire contient *toutes* les collinéations qu'il peut contenir. Nous passerons successivement en revue les divers types de M. Jordan (*Journal de l'École Polytechnique*, LI[e] Cahier, p. 134).

Premier type. — Γ dérive des collinéations de la forme

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Un calcul simple montre que

$$A' = K^{-1} A^{-1} K L,$$

$$K = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{vmatrix};$$

K figure dans Γ, ainsi que L, puisque a_{33} est racine de l'unité : A' figure ainsi dans Γ, et, comme A est quelconque dans Γ, Γ' = Γ.

Troisième et deuxième types. — Γ résulte de collinéations de la forme

$$P = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix},$$

jointes à

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad R = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix},$$

p_i, a, b, c = racines de l'unité.

On a

$$P' = P, \qquad Q' = Q^2$$

et

$$RR' = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{vmatrix} = P_1,$$

collinéation du faisceau des P,

$$R' = R^{-1}P_1, \qquad \Gamma' = \Gamma, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Quatrième type. — Transformons Γ par la collinéation

$$k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix}.$$

Γ dérivera des collinéations

$$A = \begin{vmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau^4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = A', \qquad \tau^5 = 1,$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = B',$$

$$C = \begin{vmatrix} a & 1-a & 2a(1-a)k \\ 1-a & a & -2a(1-a)k \\ k^{-1} & -k^{-1} & (1-2a) \end{vmatrix} = C'.$$

si l'on a eu soin de faire

$$2a(1-a)k^2 = 1, \qquad 1 + a(\tau + \tau^4 - 2) = 0.$$

La transformation de Γ par k équivaut, au point de vue géométrique, à un changement de coordonnées et n'altère pas les propriétés du groupe.

Ainsi $\Gamma' = \Gamma$. C. Q. F. D.

Cinquième, sixième et septième types. — Γ résulte des collinéations

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta^2 \end{vmatrix} = A', \qquad \theta^2 + \theta + 1,$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = B'^{-1}, \qquad B' = B^{-1},$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = D',$$

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \theta \\ 1 & \theta & 1 \\ 1 & \theta^2 & \theta^2 \end{vmatrix}, \qquad E' = (B^{-1}DB)^{-1}E(B^{-1}DB);$$

$$\Gamma' = \Gamma$$ C. Q. F. D.

Huitième type. — Γ dérive des collinéations suivantes :

$$A = \begin{vmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau^4 \end{vmatrix} = A', \qquad \tau^7 = 1,$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = B'^{-1}, \qquad B' = B^{-1},$$

$$C = \begin{vmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{vmatrix} = C';$$

par conséquent, $\Gamma = \Gamma'$. C. Q. F. D.

12. Théorème. — *Si Γ est l'un des groupes de M. Jordan, G résulte de la combinaison de g avec la substitution dualistique unique*

$$t_0 = \begin{vmatrix} x & u \\ u & x \end{vmatrix}.$$

Soit t la substitution dualistique qui se combine à g pour former G (**10**),

$$t = \begin{vmatrix} x & T(u) \\ u & T'^{-1}(x) \end{vmatrix};$$

prenons dans G une substitution quelconque

$$s = \begin{vmatrix} x & S(x) \\ u & S'^{-1}(u) \end{vmatrix},$$

et considérons

$$t^{-1}st = \begin{vmatrix} x & T'S'^{-1}T'^{-1}(x) \\ u & T^{-1}ST(u) \end{vmatrix}.$$

Comme S est quelconque dans Γ, on voit que les groupes $T'\Gamma'T'^{-1}$ et Γ coïncident, mais Γ' n'est pas distinct de Γ (**11**), et, par suite, T et T' sont permutables à Γ. En transformant Γ par T, on effectue entre les diverses collinéations de Γ une certaine substitution γ, dont m est l'ordre, $\gamma^m = 1$. Par conséquent, la collinéation T^m est échangeable à *toutes* les collinéations de Γ. Ici deux cas sont à distinguer, suivant la nature de Γ.

Si Γ est des sept derniers types de M. Jordan, $T^m = 1$, en vertu des propriétés connues de ces groupes, puisque T^m est échangeable à toutes les collinéations de Γ. La collinéation T et le groupe Γ_1 dérivé de Γ et de T sont d'ordre fini; comme Γ est supposé général (**11**), Γ_1 coïncide avec Γ, et Γ contient T; par suite, la substitution

$$\tau = \begin{vmatrix} x & T^{-1}(x) \\ u & T'(u) \end{vmatrix}$$

figure dans g, et la substitution

$$\tau t = \begin{vmatrix} x & u \\ u & x \end{vmatrix} = t_0$$

figure dans G, qui résulte de la combinaison de g avec t_0.

C. Q. F. D.

Si Γ est du premier type, ses collinéations sont toutes de la forme (**11**),

$$S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix};$$

T est permutable à Γ et (comme un calcul aisé le montre) de la même forme

$$T = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{vmatrix}.$$

Appelons γ le groupe des collinéations binaires

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

la collinéation T^m, étant échangeable à *toutes* les collinéations de Γ, ne peut être que

$$T^m = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix}.$$

Cela prouve que la binaire

$$\tau = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{vmatrix}$$

est d'ordre fini, ainsi que le groupe binaire γ_1 dérivé de γ et τ. On démontrera, comme il y a un instant, que τ est contenue dans γ, supposé général. La substitution

$$b = \begin{vmatrix} x & B(x) \\ u & B'^{-1}(u) \end{vmatrix},$$

où

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{vmatrix}$$

et

$$\beta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = \tau^{-1},$$

figure dans g, et la substitution dualistique

$$bt = \begin{vmatrix} u & K(u) \\ x & K'^{-1}(x) \end{vmatrix} = k,$$

où la collinéation

$$K = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix}$$

figure dans G, qui provient de la combinaison de g avec k.

La substitution dualistique k équivaut, au point de vue géométrique, à la réciprocité polaire (transformation par polaires réciproques) par rapport à la conique (z_i coordonnées courantes)

$$f = z_1^2 + z_2^2 + kz_3^2 = 0.$$

Si nous effectuons le changement de coordonnées

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_1 & z_2 & k^{-\frac{1}{2}} z_3 \end{vmatrix},$$

qui équivaut à transformer Γ par la collinéation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix},$$

nous voyons que Γ ne change pas et que la conique $f = 0$ devient

$$f_1 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2;$$

la substitution dualistique qui exprime la transformation par polaires réciproques par rapport à $f_1 = 0$ est précisément

$$t_0 = \begin{vmatrix} x & u \\ u & x \end{vmatrix},$$

et G dérive de g et t_0. C. Q. F. D.

Nous avons démontré ainsi les divers résultats annoncés dans l'Introduction.

Sur les fonctions quadruplement périodiques de deuxième et de troisième espèce;

PAR M. MARTIN KRAUSE,
Professeur à l'Université de Rostock (Allemagne).

Extrait d'une Lettre adressée à M. HERMITE.

La lecture de votre Ouvrage, si important et si intéressant : *Sur quelques applications des fonctions elliptiques,* m'a fait naître la pensée de faire des recherches analogues dans la théorie des fonctions de deux variables. Je prends la liberté de vous communiquer quelques-uns des résultats que j'y ai trouvés. Le point de vue d'où je sortais était d'établir des fonctions fondamentales, analogues à celles que vous avez trouvées dans la théorie des fonctions elliptiques; puis de révéler leurs qualités principales et de montrer de quelle manière une multitude infinie de relations fonctionnelles et de systèmes d'équations différentielles dont on connaît les intégrales peut être établie à l'aide de ces fonctions. Il est à espérer que ces systèmes d'équations différentielles pourront être employés aussi dans les Mathématiques appliquées, et qu'ils produiront des fruits abondants. Mais, dans cette occasion, je n'y tiendrai pas, je me réserve plutôt cette recherche pour un autre temps.

La méthode que je vais employer diffère en ce sens de la vôtre qu'elle

repose sur la théorie de la transformation des fonctions thêta, tandis que la vôtre se fonde sur des théorèmes connus des fonctions doublement périodiques.

1. Soit $F(v_1, v_2)$ une fonction entière et transcendante des deux variables v_1 et v_2 qui satisfait aux équations

$$(1)\quad \begin{cases} F(v_1+1, v_2) = (-1)^{g_1} F(v_1, v_3) e^{l_1 \pi i}, \\ F(v_1, v_2+1) = (-1)^{g_2} F(v_1, v_3) e^{l_2 \pi i}, \\ F(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{12}) = (-1)^{h_1} F(v_1, v_2) e^{-\pi i n(2v_1+\tau_{11}) - (2w_1 - l_1 \pi_{11} - l_2 \tau_{12})\pi i}, \\ F(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22}) = (-1)^{h_2} F(v_1, v_2) e^{-\pi i n(2v_2+\tau_{22}) - (2w_2 - l_1 \tau_{12} - l_2 \tau_{22})\pi i}. \end{cases}$$

Dans ces équations les quantités n, g_1, g_2, h_1, h_2 sont des nombres positifs et entiers, tandis que les quantités l_1, l_2, w_1, w_2 peuvent être choisies arbitrairement.

Désignons l'expression

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}$$

sous le nom de *caractéristique* de la fonction proposée.

Il s'ensuit alors qu'une telle fonction contient n^2 coefficients entièrement indépendants ou aussi qu'entre n^2+1 fonctions qui satisfont aux mêmes équations il peut exister au moins une relation linéaire. Il suffit donc de construire n^2 fonctions du même genre qui sont linéairement indépendantes l'une de l'autre pour épuiser toute l'infinie multitude des fonctions possibles. Il y a dans le choix de ces fonctions une très grande variété.

Introduisons la notation des doubles parenthèses, c'est-à-dire posons, au lieu de $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$, $\vartheta_\alpha((v))$; nous pouvons choisir, par exemple, comme fonctions fondamentales les quantités

$$\vartheta_\alpha((v))^a \vartheta_\beta((v))^b \vartheta_\gamma((v))^c \vartheta_\delta((v))^d \vartheta_\varepsilon((v+w)) e^{(l_1 v_1 + l_2 v_2)\pi i}.$$

Ici les nombres a, b, c, d satisfont à l'équation

$$a+b+c+d = n-1,$$

tandis que la somme des caractéristiques des facteurs du produit

$$\Im_\alpha((v))^a \Im_\beta((v))^b \Im_\gamma((v))^c \Im_\delta((v))^d$$

et de la fonction $\Im_\varepsilon((v))$ est égale à la caractéristique de la fonction proposée.

Posons ensuite

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\Im_\varepsilon((v+w))}{\Im_\varepsilon((v))} e^{(l_1 v_1 + l_2 v_2)\pi i} = \Phi_\varepsilon(v_1, v_2, w_1, w_2, l_1, l_2) \\ \text{ou aussi} \\ \qquad = \Phi_\varepsilon((v, w, l)). \end{cases}$$

Il est évident que nous pouvons choisir comme grandeurs fondamentales deuxièmement les suivantes :

$$\Im_\zeta((v))^{r+1} \Im_\alpha((v))^a \Im_\beta((v))^b \Im_\gamma((v))^c \Im_\delta((v))^d \frac{\partial^r \Phi_\varepsilon((v, w, l))}{\partial v_1^s \, \partial v_2^{r-s}},$$

pourvu que les nombres a, b, c, d, r satisfassent à l'équation

$$a + b + c + d = n - r - 1$$

et que les caractéristiques aient les mêmes qualités qu'auparavant.

Parmi les fonctions ci-devant définies prenons-en n^2 linéairement indépendantes; toutes les autres du même genre peuvent être exprimées linéairement par celles-ci. Si nous considérons les fonctions thêta primitives comme des quantités connues, il est évident que nous pouvons choisir comme fonctions fondamentales les quantités

$$\Phi_\varepsilon((v, w, l)) = \frac{\Im_\varepsilon((v+w)) e^{(l_1 v_1 + l_2 v_2)\pi i}}{\Im_\zeta((v))}.$$

Ces fonctions fondamentales satisfont aux équations

$$(3)\quad \begin{cases} \Phi_\varepsilon(v_1 + 1, v_2, w_1, w_2, l_1, l_2) = (-1)^{g_1} \Phi_\varepsilon((v, w, l)) e^{l_1 \pi i}, \\ \Phi_\varepsilon(v_1, v_2 + 1, w_1, w_2, l_1, l_2) = (-1)^{g_2} \Phi_\varepsilon((v, w, l)) e^{l_2 \pi i}, \\ \Phi_\varepsilon(v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{12}, w_1, w_2, l_1, l_2) \\ \qquad = (-1)^{h_1} \Phi_\varepsilon((v, w, l)) e^{-\pi i (2 w_1 - l_1 \tau_{11} - l_2 \tau_{12})}, \\ \Phi_\varepsilon(v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22}, w_1, w_2, l_1, l_2) \\ \qquad = (-1)^{h_2} \Phi_\varepsilon((v, w, l)) e^{-\pi i (2 w_2 - l_1 \tau_{12} - l_2 \tau_{22})} \end{cases}$$

et deviennent infinies pour toutes les valeurs de v_1 et v_2 pour lesquelles la fonction $\vartheta_5((v))$ devient égale à zéro. Mais ces seize fonctions ne sont pas indépendantes non plus l'une de l'autre, il suffit au contraire d'en connaître une seule pour les connaître toutes, toujours supposé que les fonctions thêta primitives soient données. En effet, cela résulte des formules du théorème d'addition dont nous voulons citer ici au moins les quatre suivantes

$$(4)\quad \begin{cases} \vartheta_5\vartheta_5 P_5 Q_5 = p_5 p_5 q_5 q_5 + p_1 p_1 q_1 q_1 \\ \qquad + p_3 p_3 q_3 q_3 + p_{13} p_{13} q_{13} q_{13}, \\ \vartheta_4\vartheta_{14} P_4 Q_5 = p_5 p_1 q_4 q_{14} + p_0 p_{01} q_{04} q_{23} \\ \qquad - p_2 p_{12} q_{24} q_{03} - p_{02} p_{34} q_{13} q_3, \\ \vartheta_5\vartheta_{01} P_{01} Q_5 = p_5 p_{01} q_5 q_{01} - p_1 p_0 q_1 q_0 \\ \qquad + p_3 p_{24} q_3 q_{24} - p_{13} p_{03} q_{13} q_{03}, \\ \vartheta_5\vartheta_0 P_0 Q_5 = p_5 p_0 q_5 q_0 + p_1 p_{01} q_1 q_{01} \\ \qquad + p_3 p_{03} q_3 q_{03} + p_{13} p_{24} q_{13} q_{24}. \end{cases}$$

Ici l'on a posé

$$P_\alpha = \vartheta_\alpha((v + w)), \qquad Q_\alpha = \vartheta_\alpha((v - w)),$$
$$p_\alpha = \vartheta_\alpha((v)), \qquad q_\alpha = \vartheta_\alpha((w)).$$

Ces formules se trouvent dans un travail de Kœnigsberger dans le *Journal de Crelle*, t. 64, et dans l'Ouvrage de l'auteur : *Die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung*; Leipzig, 1886.

Prenons comme exemple la fonction

$$(5)\quad F(v_1, v_2) = \vartheta_5(v_1 + a_1, v_2 + a_2)\,\vartheta_5(v_1 + b_1, v_2 + b_2\, e^{(l_1 v_1 + l_2 v_2)\pi i}.$$

Alors il s'ensuit que nous pouvons poser

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{F(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)} = c_1 \vartheta_5(v_1, v_2)\,\Phi_5((v, w, l)) \\ \qquad + c_2 \vartheta_1(v_1, v_2)\,\Phi_1((v, w, l)) \\ \qquad + c_3 \vartheta_{01}(v_1, v_2)\,\Phi_{01}((v, w, l)) \\ \qquad + c_4 \vartheta_0(v_1, v_2)\,\Phi_0((v, w, l)). \end{cases}$$

Ici l'on a posé

$$w_1 = a_1 + b_1, \qquad w_2 = a_2 + b_2.$$

La détermination des constantes peut être donnée à l'aide de la substitution de demi-périodes en substituant, au lieu de

$$\vartheta_5((v)), \quad \vartheta_1((v)), \quad \vartheta_{01}((v)), \quad \vartheta_0((v)),$$

successivement

$$\begin{array}{llll} i\vartheta_3((v)), & \vartheta_{13}((v)), & i\vartheta_{24}((v)), & \vartheta_{03}((v)), \\ i\vartheta_{13}((v)), & -i\vartheta_3((v)), & i\vartheta_{03}((v)), & i\vartheta_{24}((v)), \\ i\vartheta_{24}((v)), & i\vartheta_{03}((v)), & i\vartheta_3((v)), & i\vartheta_{13}((v)), \\ \vartheta_{03}((v)), & -i\vartheta_{24}((v)), & \vartheta_{13}((v)), & i\vartheta_3((v)). \end{array}$$

Alors nous obtiendrons la formule

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\vartheta_{03}\vartheta_{03}((v))\,\mathrm{F}(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)} &= \vartheta_{03}((a))\vartheta_{03}((b))\vartheta_5((v))\Phi_5((v, w, l)) \\ &+ \vartheta_{24}((a))\vartheta_{24}((b))\vartheta_1((v))\Phi_1((v, w, l)) \\ &+ \vartheta_{13}((a))\vartheta_{13}((b))\vartheta_{01}((v))\Phi_{01}((v, w, l)) \\ &- \vartheta_3((a))\vartheta_3((b))\vartheta_0((v))\Phi_0((v, w, l)), \end{aligned} \right.$$

ou aussi, en employant les notations usuelles,

$$\begin{aligned} &\vartheta_{03}\vartheta_{03}((w))\vartheta_5((v+a))\vartheta_5((v+b)) \\ &\quad = \vartheta_{03}((a))\vartheta_{03}((b))\vartheta_5((v))\vartheta_5((v+w)) \\ &\quad + \vartheta_{24}((a))\vartheta_{24}((b))\vartheta_1((v))\vartheta_1((v+w)) \\ &\quad + \vartheta_{13}((a))\vartheta_{13}((b))\vartheta_{01}((v))\vartheta_{01}((v+w)) \\ &\quad - \vartheta_3((a))\vartheta_3((b))\vartheta_0((v))\vartheta_0((v+w)). \end{aligned}$$

Deuxièmement nous pouvons poser

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{F(v_1, v_2)}{\Im_5(v_1, v_2)} &= c_1 \Im_5(v_1, v_2)\Phi_5((v, w, l)) \\ &\quad + c_2 \Im_1(v_1, v_2)\Phi_1((v, w, l)) \\ &\quad + c_3 \Im_{01}(v_1, v_2)\Phi_{01}((v, w, l)) \\ &\quad + c_4 \Im_5(v_1, v_2)^2 \frac{\partial \Phi_5((v, w, l))}{\partial v_\varepsilon} \\ &\qquad (\varepsilon = 1, 2).\end{aligned}\right.$$

En substituant des demi-périodes, nous obtenons les formules

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} N c_1 &= \Im_{03}((a))\Im_{03}((b))\Im'_3(v_\varepsilon)_0 \Im_3((w)) \\ &\quad + \Im_3((a))\Im_3((b))\Im_{03}\Im_{03}((w))\left[l_\varepsilon \pi i + \frac{\partial \log \Im_{03}((w))}{\partial w}\right], \\ N c_2 &= \Im_{24}((a))\Im_{24}((b))\Im'_3(v_\varepsilon)_0 \Im_3((w)) \\ &\quad - \Im_3((a))\Im_3((b))\Im'_{24}(v_\varepsilon)_0 \Im_{24}((w)), \\ N c_3 &= \Im_{13}((a))\Im_{13}((b))\Im'_3(v_\varepsilon)_0 \Im_3((w)) \\ &\quad - \Im_3((a))\Im_3((b))\Im'_{13}(v_\varepsilon)_0 \Im_{13}((w)), \\ N c_4 &= - \Im_3((a))\Im_3((b))\Im_{03}\Im_{03}((w)), \\ N &= \Im_3((w))\Im'_3(v_\varepsilon)_0 \Im_{03}\Im_{03}((w)).\end{aligned}\right.$$

Ici l'on a posé

$$\Im'_\alpha(v_\varepsilon)_0 = \left[\frac{\partial \Im_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_\varepsilon}\right]_{v_1=v_2=0}.$$

Enfin nous voulons poser

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{F(v_1, v_2)}{\Im_5(v_1, v_2)} &= c_1 \Im_5(v_1, v_2)\Phi_5((v, w, l)) \\ &\quad + c_2 \Im_1(v_1, v_2)\Phi_1((v, w, l)) \\ &\quad + c_3 \Im_5(v_1, v_2)^2 \frac{\partial \Phi_5((v, w, l))}{\partial v_1} \\ &\quad + c_4 \Im_5(v_1, v_2)^2 \frac{\partial \Phi_5((v, w, l))}{\partial v_2}.\end{aligned}\right.$$

Pour les constantes s'obtiennent les valeurs

$$
(11)\quad
\left\{
\begin{aligned}
& c_4 \vartheta_3((w))\vartheta_{13}((w))(13,3) \\
& \quad = \vartheta_{13}((a))\vartheta_{13}((b))\vartheta_3((w))\vartheta'_3(v_1)_0 \\
& \quad - \vartheta_3((a))\vartheta_3((b))\vartheta_{13}((w))\vartheta'_{13}(v_1)_0, \\
& c_3 \vartheta_3((w))\vartheta_{13}((w))(13,3) \\
& \quad = \vartheta_3((a))\vartheta_3((b))\vartheta_{13}((w))\vartheta'_{13}(v_2)_0 \\
& \quad - \vartheta_{13}((a))\vartheta_{13}((b))\vartheta_3((w))\vartheta'_3(v_2)_0, \\
& c_2 \vartheta_{03}\vartheta_{03}((w)) \\
& \quad = \vartheta_{24}((a))\vartheta_{24}((b)) - \vartheta_{24}((w))[c_3 \vartheta'_{24}(v_1)_0 + i_4 \vartheta'_{24}(v_2)_0], \\
& c_1 \vartheta_{03}\vartheta_{03}((w)) \\
& \quad = \vartheta_{03}((a))\vartheta_{03}((b)) \\
& \quad - \vartheta_{03}\vartheta_{03}((w))\left[c_3\left(l_1 \pi i + \frac{\partial \log \vartheta_3((w))}{\partial w_1}\right)\right] \\
& \quad + c_4\left[l_2 \pi i + \frac{\partial \log \vartheta_3((w))}{\partial w_2}\right], \\
& \qquad\qquad [(13,3) = \pi^2 \vartheta_5 \vartheta_{34} \vartheta_{03} \vartheta_{23}].
\end{aligned}
\right.
$$

D'une manière semblable encore d'autres relations peuvent être établies.

En outre, nous pouvons former d'une manière analogue le produit

$$\vartheta_5((v+a))\vartheta_5((v+b))\ldots\vartheta_5((v+m))e^{(l_1 v_1 + l_2 v_2)\pi i}.$$

Il peut être représenté ou comme fonction linéaire des quantités

$$\Phi_\alpha((v, w, l))_{\alpha:5,01,1,0},$$

dont les coefficients sont des fonctions entières des fonctions thêta primitives ou comme fonction entière des quotients différentiels des quantités

$$\Phi_5((v, w, l)) \quad \text{et} \quad \Phi_1((v, w, l)), \quad \ldots.$$

Ici l'on a posé

$$x_\varepsilon = a_\varepsilon + b_\varepsilon + \ldots + m_\varepsilon, \qquad (\varepsilon : 1, 2).$$

Les constantes peuvent être déterminées par des développements en séries. Pour simplifier ces développements en séries dans le cas traité et dans le cas général, nous introduirons, comme dans la théorie des fonctions hyperelliptiques, les variables u_1 et u_2, en posant

$$(12) \qquad \begin{cases} u_1 = K_{11} v_1 + K_{12} v_2, \\ u_2 = K_{21} v_1 + K_{22} v_2. \end{cases}$$

Les quantités K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22} sont déterminées par les équations

$$(13) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}'_3(v_1)_0 = \quad K_{21} \dfrac{\mathfrak{S}_{01}\mathfrak{S}_{12}\mathfrak{S}_{23}\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_{03}\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_{14}}{\mathfrak{S}_{34}^2\mathfrak{S}_4^2\mathfrak{S}_5^2}, \\ \mathfrak{S}'_3(v_2)_0 = \quad K_{22} \dfrac{\mathfrak{S}_{01}\mathfrak{S}_{12}\mathfrak{S}_{23}\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_{03}\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_{14}}{\mathfrak{S}_{34}^2\mathfrak{S}_4^2\mathfrak{S}_5^2}, \\ \mathfrak{S}'_{24}(v_1)_0 = -K_{11} \dfrac{\mathfrak{S}_{03}\mathfrak{S}_{12}\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_{14}}{\mathfrak{S}_{34}\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5}, \\ \mathfrak{S}'_{24}(v_2)_0 = -K_{12} \dfrac{\mathfrak{S}_{03}\mathfrak{S}_{12}\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_{14}}{\mathfrak{S}_{34}\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5}. \end{cases}$$

En même temps nous définissons quatre quantités K'_{11}, K'_{12}, K'_{21}, K'_{22} par les équations

$$(14) \qquad \begin{cases} K_{11}\tau_{11} + K_{12}\tau_{12} = K'_{11}, \qquad K_{11}\tau_{12} + K_{12}\tau_{22} = K'_{12}, \\ K_{21}\tau_{11} + K_{22}\tau_{12} = K'_{21}, \qquad K_{21}\tau_{12} + K_{22}\tau_{22} = K'_{22}. \end{cases}$$

Posons alors

$$(15) \qquad \begin{cases} l_1 = \lambda_1 K_{11} + \lambda_2 K_{21}, \qquad l_2 = \lambda_1 K_{12} + \lambda_2 K_{22}, \\ \omega_1 = x_1 K_{11} + x_2 K_{12}, \qquad \omega_2 = x_1 K_{21} + x_2 K_{22}. \end{cases}$$

Nous aurons des fonctions qui satisfont aux équations

$$
(16)\quad \begin{cases}
f(u_1+K_{11}, u_2+K_{21}) = (-1)^{g_1} f(u_1, u_2)\, e^{(\lambda_1 K_{11}+\lambda_2 K_{21})\pi i},\\
f(u_1+K_{12}, u_2+K_{22}) = (-1)^{g_2} f(u_1, u_2)\, e^{(\lambda_1 K_{12}+\lambda_2 K_{22})\pi i},\\
f(u_1+K'_{11}, u_2+K'_{21}) = (-1)^{h_1} f(u_1, u_2)\, e^{-\pi i n\alpha_1+\lambda_1 K'_{11}+\lambda_2 K'_{21}},\\
f(u_1+K'_{12}, u_2+K'_{22}) = (-1)^{h_2} f(u_1, u_2)\, e^{-\pi i n\alpha_2+\lambda_1 K'_{12}+\lambda_2 K'_{22}}.\\
\alpha_1 K = \quad 2K_{22}\left(u_1+\frac{\omega_1}{n}\right) - 2K_{12}\left(u_2+\frac{\omega_2}{n}\right) + K'_{11}K_{22} - K'_{21}K_{12},\\
\alpha_2 K = -2K_{21}\left(u_1+\frac{\omega_1}{n}\right) + 2K_{11}\left(u_2+\frac{\omega_2}{n}\right) - K'_{12}K_{21} + K'_{22}K_{11},\\
K = K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}.
\end{cases}
$$

Nous désignerons les quantités de cette nature sous le nom de *fonctions quadruplement périodiques de troisième espèce*, mais nous nous bornerons à celles qui peuvent être ordonnées partout suivant les puissances croissantes de u_1 et u_2.

Ces fonctions se composent des fonctions fondamentales ci-devant définies si l'on substitue $u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2$ au lieu de $v_1, v_2, w_1, w_2, l_1, l_2$. Il convient de les remplacer par d'autres éléments simples qui n'en diffèrent que de certaines constantes. Dans le choix de ces constantes il règne une grande variété. Nous les introduirons pour simplifier les résultats dans les solutions des problèmes proposés et les varierons avec ces problèmes. Premièrement nous voulons les introduire de la manière suivante.

Proposons les fonctions thêta primitives comme fonctions de u_1 et u_2 et désignons les quotients différentiels des fonctions thêta impaires pour les valeurs spéciales $u_1 = u_2 = 0$ par

$$\frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon}.$$

Nous obtiendrons les formules

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\vartheta_3(v_1, v_2)_0}{\partial u_1} = 0,\\
&\frac{\partial\vartheta_3(v_1, v_2)_0}{\partial u_2} = \frac{\vartheta_{01}\vartheta_{12}\vartheta_{23}\vartheta_2\vartheta_{03}\vartheta_0\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2\vartheta_4^2\vartheta_5^2},\\
&\frac{\partial\vartheta_{24}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1} = -\frac{\vartheta_{03}\vartheta_{12}\vartheta_0\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5},\\
&\frac{\partial\vartheta_{24}(v_1, v_2)_0}{\partial u_2} = 0,\\
&\frac{\partial\vartheta_{04}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1} = \frac{\vartheta_{14}\vartheta_{01}\vartheta_2\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5},\\
&\frac{\partial\vartheta_{04}(v_1, v_2)_0}{\partial u_2} = \frac{\vartheta_{14}\vartheta_{01}\vartheta_2\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5},\\
&\frac{\partial\vartheta_1(v_1, v_2)_0}{\partial u_1} = \frac{\vartheta_5\vartheta_4\vartheta_2\vartheta_0}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5},\\
&\frac{\partial\vartheta_1(v_1, v_2)_0}{\partial u_2} = \varkappa^2\,\frac{\vartheta_5\vartheta_4\vartheta_2\vartheta_0}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5},\\
&\frac{\partial\vartheta_{02}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1} = \frac{\vartheta_{12}\vartheta_{34}\vartheta_{01}\vartheta_4}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5},\\
&\frac{\partial\vartheta_{02}(v_1, v_2)_0}{\partial u_2} = \lambda^2\,\frac{\vartheta_{12}\vartheta_{34}\vartheta_{01}\vartheta_4}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5},\\
&\frac{\partial\vartheta_{13}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1} = \frac{\vartheta_{23}\vartheta_{03}\vartheta_5\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5},\\
&\frac{\partial\vartheta_{13}(v_1, v_2)_0}{\partial u_2} = \mu^2\,\frac{\vartheta_{23}\vartheta_{03}\vartheta_5\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5}.
\end{aligned}\right.$$

$$\varkappa^2 = \frac{\vartheta_{23}^2\vartheta_{01}^2}{\vartheta_4^2\vartheta_5^2}, \qquad \lambda^2 = \frac{\vartheta_2^2\vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2\vartheta_4^2}, \qquad \mu^2 = \frac{\vartheta_2^2\vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2}.$$

Ensuite nous désignons

$$(18)\qquad \frac{\vartheta_\beta(v_1, v_2)}{\vartheta_\beta} = \sigma_\beta(u_1, u_2) = \sigma_\beta((u)),$$

pourvu que $\vartheta_\beta(v_1, v_2)$ soit une fonction paire de ses arguments et

$$(19)\qquad \frac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\dfrac{\partial\vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1} + \dfrac{\partial\vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_2}} = \sigma_\alpha(u_1, u_2) = \sigma_\alpha((u)),$$

pourvu que $\vartheta_\alpha(v, v_2)$ soit une fonction impaire des mêmes arguments.

A l'aide de ces quantités nous définirons les fonctions hyperelliptiques par les équations

$$\mathrm{al}_a(u_1, u_2) = \frac{\sigma_a(u_1, u_2)}{\sigma_5(u_1, u_2)}. \tag{20}$$

Enfin nous poserons

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_a(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) &= \sigma_a((u, \omega, \lambda)) = \frac{\vartheta_a((v + w))e^{(l_1 v_1 + l_2 v_2)\pi i}}{\vartheta_a((w))}, \\ \varphi_a(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) &= \varphi_a((u, \omega, \lambda)) = \frac{\sigma_a((u, \omega, \lambda))}{\sigma_5((u))}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Toutes les fonctions quadruplement périodiques de la troisième espèce qui possèdent les propriétés auparavant établies, après être divisées par $\vartheta_5(v_1, v_2)^n$, s'expriment rationnellement par les fonctions hyperelliptiques des arguments u_1 et u_2 et par les quantités

$$\varphi_a((u, \omega, \lambda)).$$

Ces fonctions elles-mêmes satisfont aux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi_a(u_1 + K_{11}, u_2 + K_{21}, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ &\quad = (-1)^{g_1}\varphi_a((u, \omega, \lambda))\, e^{(\lambda_1 K_{11} + \lambda_2 K_{21})\pi i}, \\ &\varphi_a(u_1 + K_{12}, u_2 + K_{22}, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ &\quad = (-1)^{g_2}\varphi_a((u, \omega, \lambda))\, e^{(\lambda_1 K_{12} + \lambda_2 K_{22})\pi i}, \\ &\varphi_a(u_1 + K'_{11}, u_2 + K'_{21}, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ &\quad = (-1)^{h_1}\varphi_a((u, \omega, \lambda))\, e^{(\lambda_1 K'_{11} + \lambda_2 K'_{21})\pi i - n\alpha'_1 \pi i}, \\ &\varphi_a(u_1 + K'_{12}, u_2 + K'_{22}, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ &\quad = (-1)^{h_2}\varphi_a((u, \omega, \lambda))\, e^{(\lambda_1 K'_{12} + \lambda_2 K'_{22})\pi i - n\alpha'_3 \pi i}. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

$$\begin{aligned} K\alpha'_1 &= 2K_{22}\omega_1 - 2K_{12}\omega_2, \\ K\alpha'_2 &= -2K_{21}\omega_1 + 2K_{11}\omega_2, \end{aligned}$$

et doivent être choisies comme fonctions fondamentales.

Nous désignerons les quantités de cette nature sous le nom de *fonc-*

tions quadruplement périodiques de seconde espèce. Les fonctions $\varphi_a((u, \omega, \lambda))$ ont au surplus la propriété qu'elles deviennent infinies quand la fonction $\sigma_5(u_1, u_2)$ devient égale à zéro. Les fonctions fondamentales que nous avons introduites ne sont pas indépendantes l'une de l'autre; mais il suffit d'en connaître une seule pour les connaître toutes, supposé en effet que les fonctions hyperelliptiques soient connues. Cela suit des formules du théorème d'addition dont nous voulons citer au moins les quatre suivantes :

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{P}'_5\mathrm{Q}'_5 &= p'^2_5 q'^2_5 + \frac{\mu^2\mu_1^2\mu_\lambda^2(1+\varkappa^2)^4}{\mu_\varkappa^2} p'^2_1 q'^2_1 \\
&\quad + \varkappa^2\varkappa_1^2\mu^2\mu_1^2\mu_\lambda^2\lambda_\varkappa^2 p'^2_3 q'^2_3 + \frac{\varkappa^2\varkappa_1^2\lambda_\varkappa^2(1+\mu^2)^4}{\mu_\varkappa^2} p'^2_{13} q'^2_{13},\\
\mathrm{P}'_1\mathrm{Q}'_5 &= p'_5 p'_1 q'_4 q'_{14} + \frac{2\varkappa^2}{1+\varkappa^2} p'_0 p'_{01} q'_{04} q'_{23} \\
&\quad + \frac{\varkappa_1^2}{1+\varkappa^2} p'_2 p'_{12} q'_{24} q'_{03} \\
&\quad - \frac{\varkappa^2\varkappa_1^2(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}{1+\varkappa^2} p'_{02} p'_{34} q'_{13} q'_3,\\
\mathrm{P}'_{04}\mathrm{Q}'_5 &= p'_5 p'_{01} q'_5 q'_{01} - \frac{\mu_1^2\mu_\lambda^2(1+\varkappa^2)^2}{\mu_\varkappa^2} p'_1 p'_0 q'_1 q'_0 \\
&\quad + \varkappa_1^2\mu_1^2\lambda_\varkappa^2\mu_\lambda^2 p'_3 p'_{24} q'_3 q'_{24} - \frac{\varkappa_1^2\lambda_\varkappa^2(1+\mu^2)^2}{\mu_\varkappa^2} p'_{13} p'_{03} q'_{13} q'_{03},\\
\mathrm{P}'_0\mathrm{Q}'_5 &= p'_0 p'_5 q'_0 q'_5 + \mu^2(1+\varkappa^2)^2 p'_1 p'_{01} q'_1 q'_{01} \\
&\quad + \varkappa_1^2\mu^2\lambda_\varkappa^2 p'_3 p'_{03} q'_3 q'_{03} + \varkappa_1^2\lambda_\varkappa^2(1+\mu^2)^2 p'_{13} p'_{24} q'_{13} q'_{24}.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, on a posé

$$\mathrm{P}'_\alpha = \sigma_\alpha((u+\omega)), \qquad \mathrm{Q}'_\alpha = \sigma_\alpha((u-\omega)),$$
$$\varkappa_1^2 = 1 - \varkappa^2, \qquad \lambda_1^2 = 1 - \lambda^2, \qquad \mu_1^2 = 1 - \mu^2,$$
$$p_\alpha = \sigma_\alpha((u)), \qquad q_\alpha = \sigma_\alpha((\omega)),$$
$$\mu_\varkappa^2 = \varkappa^2 - \mu^2, \qquad \mu_\lambda^2 = \lambda^2 - \mu^2, \qquad \lambda_\varkappa^2 = \varkappa^2 - \lambda^2.$$

Les constantes que l'on rencontre dans les relations dont nous avons prouvé l'existence s'expriment à l'aide des développements en séries qui seront considérés dans le paragraphe suivant.

3. Le développement de la fonction

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi_5(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) = \dfrac{\sigma_5(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\sigma_5(u_1, u_2)} \\ \qquad = \dfrac{\sigma_5(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2)\, e^{(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)\pi i}}{\sigma_5(u_1, u_2)\,\sigma_5(\omega_1, \omega_2)}, \end{cases}$$

dans le voisinage du point $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, n'offre pas de difficultés.

En effet, nous aurons

$$(2)\quad \begin{cases} \log\varphi_5(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ \quad = \log\sigma_5(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2) - \log\sigma_5(u_1, u_2) \\ \qquad - \log\sigma_5(\omega_1, \omega_2) + (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)\pi i. \end{cases}$$

Le côté droit peut être développé suivant les puissances croissantes de u_1 et u_2.

Nous obtenons

$$(3)\quad \begin{cases} \log\sigma_5(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2) - \log\sigma_5(u_1, u_2) \\ \quad = \log\sigma_5(\omega_1, \omega_2) + u_1\left[\dfrac{\partial\log\sigma_5(\omega_1, \omega_2)}{\partial\omega_1} + \lambda_1\pi i\right] \\ \qquad + u_2\left[\dfrac{\partial\log\sigma_5(\omega_1, \omega_2)}{\partial\omega_2} + \lambda_2\pi i\right] \\ \qquad + \dfrac{1}{1.2}(a_{20}u_1^2 + 2a_{11}u_1u_2 + a_{02}u_2^2) + \ldots. \end{cases}$$

Les coefficients des puissances supérieures s'expriment rationnellement par les fonctions hyperelliptiques des arguments ω_1, ω_2 et par les quantités $\varkappa^2$, λ^2, μ^2. En effet, cela suit immédiatement des relations

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\log\sigma_5((u))}{\partial u_1^2} = \dfrac{\partial^2\log\sigma_5((u))_0}{\partial u_1^2} + \dfrac{\mu^2\mu_1^2\mu_\lambda^2(1+\varkappa^2)^2}{\mu_\varkappa^2}\,\mathrm{al}_1((u))^2 + \dfrac{\varkappa^2\varkappa_1^2\lambda_\varkappa^2(1+\mu^2)^2}{\mu_\varkappa^2}\,\mathrm{al}_{13}((u))^2, \\ \dfrac{\partial^2\log\sigma_5((u))}{\partial u_1\,\partial u_2} = \dfrac{\partial^2\log\sigma_5((u))_0}{\partial u_1\,\partial u_2} + \dfrac{\mu^2\mu_1^2\varkappa^2\mu_\lambda^2(1+\varkappa^2)^2}{\mu_\varkappa^2}\,\mathrm{al}_1((u))^2 + \dfrac{\varkappa^2\varkappa_1^2\mu^2\lambda_\varkappa^2(1+\mu^2)^2}{\mu_\varkappa^2}\,\mathrm{al}_{13}((u))^2, \\ \dfrac{\partial^2\log\sigma_5((u))}{\partial u_2^2} = \dfrac{\partial^2\log\sigma_5((u))_0}{\partial u_2^2} + \dfrac{\mu^2\mu_1^2\varkappa^4\mu_\lambda^2(1+\varkappa^2)^2}{\mu_\varkappa^2}\,\mathrm{al}_1((u))^2 \\ \qquad + \varkappa^2\varkappa_1^2\mu^2\mu_1^2\mu_\lambda^2\lambda_\varkappa^2\,\mathrm{al}_3((u))^2 + \dfrac{\varkappa^2\varkappa_1^2\mu^4\lambda_\varkappa^2(1+\mu^2)^2}{\mu_\varkappa^2}\,\mathrm{al}_{13}((u))^2. \end{cases}$$

Dans ces formules on a posé

$$\frac{\partial^2 \sigma_5((u))_0}{\partial u_1^2} = \left[\frac{\partial^2 \sigma_5((u))}{\partial u_1^2}\right]_{u_1=u_2=0}$$

Nous arriverons ainsi au théorème suivant :

Théorème. — *La fonction*

$$\varphi_5(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2)$$

s'exprime comme produit de deux facteurs. L'un est égal à

$$e^{u_1\left[\frac{\partial \log \sigma_5(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1} + \lambda_1 \pi i\right] + u_2\left[\frac{\partial \log \sigma_5(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2} + \lambda_2 \pi i\right]},$$

l'autre peut être ordonné suivant les puissances croissantes de u_1 *et* u_2. *Les coefficients de cette série s'expriment rationnellement par* $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 *et par les fonctions hyperelliptiques des arguments* ω_1 *et* ω_2.

Il en résulte que, si nous posons

$$(5) \qquad \pi i \lambda_1 = -\frac{\partial \log \sigma_5(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1}, \qquad \pi i \lambda_2 = -\frac{\partial \log \sigma_5(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2},$$

nos fonctions peuvent être développées en séries dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités ci-devant définies.

Nous arrivons maintenant au problème plus difficile d'étudier le caractère de la fonction fondamentale dans le voisinage d'un autre point quelconque.

Nous nous bornerons à un cas particulier.

Nous supposons

$$(6) \qquad \pi i \lambda_1 = -\frac{\partial \log \sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1}, \qquad \pi i \lambda_2 = -\frac{\partial \log \sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2}$$

et nous proposons d'étudier le caractère de la fonction

$$(7) \quad \begin{cases} \psi_1(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) = \dfrac{\sigma_1(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\sigma_1(u_1, u_2)} \\[2ex] \qquad = \dfrac{\sigma_1(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2)\, e^{(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)\pi i}}{\sigma_1(u_1, u_2)\, \sigma_1(\omega_1, \omega_2)} \end{cases}$$

dans le voisinage du point $u_1 = 0$, $u_2 = 0$.

Pour cela nous partirons des égalités

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log \psi_1(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial u_\varepsilon} = \dfrac{\partial \log \sigma_1(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2)}{\partial u_\varepsilon} \\ \qquad\qquad - \dfrac{\partial \log \sigma_1(u_1, u_2)}{\partial u_\varepsilon} - \dfrac{\partial \log \sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_\varepsilon} \end{cases}$$

$$(\varepsilon = 1, 2).$$

Cela posé, nous aurons d'abord

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log \sigma_1(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2)}{\partial u_1} - \dfrac{\partial \log \sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1} \\ \quad = u_1 \dfrac{\partial^2 \log \sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1^2} + u_2 \dfrac{\partial^2 \log \sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1\, \partial \omega_2} \\ \qquad + \dfrac{1}{1.2}(b_{20} u_1^2 + 2 b_{11} u_1 u_2 + b_{02} u_2^2) + \ldots, \\ \dfrac{\partial \log \sigma_1(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2)}{\partial u_2} - \dfrac{\partial \log \sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2} \\ \quad = u_1 \dfrac{\partial^2 \log \sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1\, \partial \omega_2} + u_2 \dfrac{\partial^2 \log \sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2^2} \\ \qquad + \dfrac{1}{1.2} b'_{20} u_1^2 + 2 b'_{11} u_1 u_2 + b'_{02} u_2^2) + \ldots . \end{cases}$$

Mais des équations

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \log \sigma_1(u_1, u_2)}{\partial u_1^2} = \dfrac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2} - \dfrac{1}{(1+\varkappa^2)^2} \dfrac{1}{\mathrm{al}_1(u_1, u_1)^2} \\ \qquad - \dfrac{\varkappa^2 \varkappa_1^2 \lambda_\varkappa^2}{(1+\varkappa^2)^2} \dfrac{\mathrm{al}_3(u_1, u_2)^2}{\mathrm{al}_1(u_1, u_2)^2}, \\ \dfrac{\partial^2 \log \sigma_1(u_1, u_2)}{\partial u_1\, \partial u_2} = \dfrac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_1\, \partial u_2} - \dfrac{\varkappa^2}{(1+\varkappa^2)^2} \dfrac{1}{\mathrm{al}_1(u_1, u_2)^2} \\ \qquad - \dfrac{\varkappa^2 \varkappa_1^2 \lambda_\varkappa^2}{(1+\varkappa^2)^2} \mu^2 \dfrac{\mathrm{al}_3(u_1, u_2)^2}{\mathrm{al}_1(u_1, u_2)^2}, \\ \dfrac{\partial^2 \log \sigma_1(u_1, u_2)}{\partial u_2^2} = \dfrac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^2} - \dfrac{\varkappa^4}{(1+\varkappa^2)^2} \dfrac{1}{\mathrm{al}_1(u_1, u_2)^2} \\ \qquad + \dfrac{(1+\mu^2)^2}{(1+\varkappa^2)^2} \varkappa^2 \varkappa_1^2 \lambda_\varkappa^2 \dfrac{\mathrm{al}_{13}(u_1, u_2)^2}{\mathrm{al}_1(u_1, u_2)^2} \\ \qquad - \dfrac{\varkappa^2 \varkappa_1^2 \lambda_\varkappa^2}{(1+\varkappa^2)^2} \mu^4 \dfrac{\mathrm{al}_3(u_1, u_2)^2}{\mathrm{al}_1(u_1, u_2)^2} \end{cases}$$

nous concluons que les équations (9) peuvent être représentées de la manière suivante :

$$
(11)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial \log \sigma_1(u_1+\omega_1,\, u_2+\omega_2)}{\partial u_1} - \dfrac{\partial \log \sigma_1(\omega_1,\, \omega_2)}{\partial \omega_1} \\
\qquad = u_1 \dfrac{\partial^2 \sigma_5(u_1,\, u_2)_0}{\partial u_1^2} + u_2 \dfrac{\partial^2 \sigma_5(u_1,\, u_2)_0}{\partial u_1\, \partial u_2} + \mathrm{P}_1(u_1,\, u_2), \\
\dfrac{\partial \log \sigma_1(u_1+\omega_1,\, u_2+\omega_2)}{\partial u_2} - \dfrac{\partial \log \sigma_1(\omega_1,\, \omega_2)}{\partial \omega_2} \\
\qquad = u_1 \dfrac{\partial^2 \sigma_5(u_1,\, u_2)_0}{\partial u_1\, \partial u_2} + u_2 \dfrac{\partial^2 \sigma_5(u_1,\, u_2)_0}{\partial u_2^2} + \mathrm{P}_2(u_1,\, u_2).
\end{cases}
$$

Dans ces formules $\mathrm{P}_1(u_1,\, u_2)$ et $\mathrm{P}_2(u_1,\, u_2)$ sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de u_1 et u_2, dont les coefficients s'expriment rationnellement par les fonctions hyperelliptiques des arguments ω_1 et ω_2, et par les grandeurs $\varkappa^2$, λ^2, μ^2.

En outre, nous pouvons poser

$$
(12)\quad \begin{cases}
\mathrm{P}_1(u_1,\, u_2) = \dfrac{\partial f_1(u_1,\, u_2)}{\partial u_1}, \\
\mathrm{P}_2(u_1,\, u_2) = \dfrac{\partial f_1(u_1,\, u_2)}{\partial u_2}.
\end{cases}
$$

Dans ces formules $f(u_1,\, u_2)$ est aussi une série ordonnée suivant les puissances de u_1 et u_2 dont les coefficients ont les qualités déjà plusieurs fois citées.

Alors nous obtiendrons le résultat

$$
\begin{aligned}
& d \log \psi_1(u_1,\, u_2,\, \omega_1,\, \omega_2,\, \lambda_1,\, \lambda_2) \\
&\quad = \frac{d}{1.2}\left[u_1^2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1,\, u_2)_0}{\partial u_1^2} + 2 u_1 u_2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1,\, u_2)_0}{\partial u_1\, \partial u_2} + u_2^2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1,\, u_2)_0}{\partial u_2^2} \right] \\
&\qquad + d f_1(u_1,\, u_2) - d \log \sigma_1(u_1,\, u_2),
\end{aligned}
$$

ou aussi

$$
(13)\quad \begin{cases}
\psi_1(u_1,\, u_2,\, \omega_1,\, \omega_2,\, \lambda_1,\, \lambda_2)\, \sigma_1(u_1,\, u_2) \\
\qquad = \mathrm{C} e^{\frac{1}{2}\left[u_1^2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1,\, u_2)_0}{\partial u_1^2} + 2 u_1 u_2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1,\, u_2)_0}{\partial u_1\, \partial u_2} + u_2^2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1,\, u_2)_0}{\partial u_2^2} \right]} \mathrm{P}(u_1,\, u_2).
\end{cases}
$$

Dans cette formule $P(u_1, u_2)$ est également une série ordonnée suivant les puissances de u_1 et u_2, ayant les mêmes qualités que $P_1(u_1, u_2)$, ... La constante C s'obtient égale à l'unité en posant sur le côté gauche et droit $u_1 = u_2 = 0$.

Joignons-y le résultat que la fonction $\sigma_1(u_1, u_2)$ satisfait à une équation de la forme

$$\sigma_1(u_1, u_2) = e^{\frac{1}{2}\left[u_1^2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2} + 2 u_1 u_2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2} + u_2^2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^2}\right]} P'(u_1, u_2),$$

nous aurons le résultat

$$(14) \qquad \psi_1(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{P(u_1, u_2)}{P'(u_1, u_2)},$$

ou aussi le théorème

THÉORÈME. — *La fonction $\psi_1(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2)$ peut être représentée comme quotient de deux séries ordonnées suivant les puissances croissantes de u_1 et u_2.*

4. Il s'ensuit des considérations précédentes qu'il doit exister entre les quantités y introduites une variété infinie de relations différentielles. Nous pouvons déterminer les coefficients à l'aide des développements donnés au dernier paragraphe. Nous préférons cependant dans les exemples suivants une autre méthode qui, à son tour, donnera quelques lois pour le développement en séries.

Nous pouvons poser

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_5((v, w, l))}{\partial v_\varepsilon} &= c_1^{(\varepsilon)} \Phi_5((v, w, l)) + c_2^{(\varepsilon)} \frac{\mathfrak{S}_1((v))}{\mathfrak{S}_5((v))} \Phi_1((v, w, l)) \\ &+ c_3^{(\varepsilon)} \frac{\mathfrak{S}_{01}((v))}{\mathfrak{S}_5((v))} \Phi_{01}((v, w, l)) + c_4^{(\varepsilon)} \frac{\mathfrak{S}_0((v))}{\mathfrak{S}_5((v))} \Phi_0((v, w, l)). \end{aligned} \right.$$

En substituant des demi-périodes, nous obtiendrons

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} c_1^{(\varepsilon)} &= \frac{\partial \mathfrak{S}_{03}((w))}{\partial w_\varepsilon} \frac{1}{\mathfrak{S}_{03}((w))} + l_\varepsilon \pi i, \qquad & c_2^{(\varepsilon)} &= -\frac{\mathfrak{S}'_{24}(v_\varepsilon)_0}{\mathfrak{S}_{03}} \frac{\mathfrak{S}_{24}((w))}{\mathfrak{S}_{03}((w))}, \\ c_3^{(\varepsilon)} &= -\frac{\mathfrak{S}'_{13}(v_\varepsilon)_0}{\mathfrak{S}_{03}} \frac{\mathfrak{S}_{13}((w))}{\mathfrak{S}_{03}((w))}, & c_4^{(\varepsilon)} &= \frac{\mathfrak{S}'_3(v_\varepsilon)_0}{\mathfrak{S}_{03}} \frac{\mathfrak{S}_3((w))}{\mathfrak{S}_{03}((w))}. \end{aligned} \right.$$

D'une manière semblable nous trouverons les formules suivantes :

$$(3)\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_1((v,w,l))}{\partial v_\varepsilon} = c_5^{(\varepsilon)} \Phi_1((v,w,l) + c_6^{(\varepsilon)} \dfrac{\mathfrak{S}_1((v))}{\mathfrak{S}_5((v))} \Phi_5((v.w,l)) \\ \qquad + c_7^{(\varepsilon)} \dfrac{\mathfrak{S}_{01}((v))}{\mathfrak{S}_5((v))} \Phi_0((v,w,l)) + c_8^{(\varepsilon)} \dfrac{\mathfrak{S}_0((v))}{\mathfrak{S}_5((v))} \Phi_{01}((v,w,l)), \\ c_5^{(\varepsilon)} = \dfrac{\partial \mathfrak{S}_{24}((w))}{\partial w_\varepsilon} \dfrac{1}{\mathfrak{S}_{24}((w))} + l_\varepsilon \pi i, \qquad c_6^{(\varepsilon)} = - \dfrac{\mathfrak{S}_{03}((w))}{\mathfrak{S}_{03}} \dfrac{\mathfrak{S}'_{24}(v_\varepsilon)_0}{\mathfrak{S}_{24}((w))}, \\ c_7^{(\varepsilon)} = \dfrac{\mathfrak{S}'_{13}(v_\varepsilon)_0}{\mathfrak{S}_{03}} \dfrac{\mathfrak{S}_3((w))}{\mathfrak{S}_{24}((w))}, \qquad c_8^{(\varepsilon)} = - \dfrac{\mathfrak{S}'_3(v_\varepsilon)_0}{\mathfrak{S}_{03}} \dfrac{\mathfrak{S}_{13}((w))}{\mathfrak{S}_{24}((w))}; \\ \dfrac{\partial \Phi_{01}((v,w,l))}{\partial v_\varepsilon} = c_9^{(\varepsilon)} \Phi_{01}((v,w,l) + c_{10}^{(\varepsilon)} \dfrac{\mathfrak{S}_1((v))}{\mathfrak{S}_5((v))} \Phi_0((v,w,l)) \\ \qquad + c_{11}^{(\varepsilon)} \dfrac{\mathfrak{S}_{01}((v))}{\mathfrak{S}_5((v))} \Phi_5((v,w,l) + c_{12}^{(\varepsilon)} \dfrac{\mathfrak{S}_0((v))}{\mathfrak{S}_5((v))} \Phi_1((v,w,l)), \\ c_9^{(\varepsilon)} = \dfrac{\partial \mathfrak{S}_{13}((w))}{\partial w_\varepsilon} \dfrac{1}{\mathfrak{S}_{13}((w))} + \pi i l_\varepsilon, \qquad c_{10}^{(\varepsilon)} = - \dfrac{\mathfrak{S}'_{24}(v_\varepsilon)_0}{\mathfrak{S}_{03}} \dfrac{\mathfrak{S}_3((w))}{\mathfrak{S}_{13}((w))}, \\ c_{11}^{(\varepsilon)} = - \dfrac{\mathfrak{S}'_{13}(v_\varepsilon)_0}{\mathfrak{S}_{03}} \dfrac{\mathfrak{S}_{03}((w))}{\mathfrak{S}_{13}((w))}, \qquad c_{12}^{(\varepsilon)} = \dfrac{\mathfrak{S}'_3(v_\varepsilon)_0}{\mathfrak{S}_{03}} \dfrac{\mathfrak{S}_{24}((w))}{\mathfrak{S}_{13}((w))}; \\ \dfrac{\partial \Phi_0((v,w,l))}{\partial v_\varepsilon} = c_{13}^{(\varepsilon)} \Phi_0((v,w,l)) + c_{14}^{(\varepsilon)} \dfrac{\mathfrak{S}_1((v))}{\mathfrak{S}_5((v))} \Phi_{01}((v,w,l)) \\ \qquad + c_{15}^{(\varepsilon)} \dfrac{\mathfrak{S}_{01}((v))}{\mathfrak{S}_5((v))} \Phi_1((v,w,l) + c_{16}^{(\varepsilon)} \dfrac{\mathfrak{S}_0((v))}{\mathfrak{S}_5((v))} \Phi_5((v,w,l)), \\ c_{13}^{(\varepsilon)} = \dfrac{\partial \mathfrak{S}_3((w))}{\partial w_\varepsilon} \dfrac{1}{\mathfrak{S}_3((w))} + \pi i l_\varepsilon, \qquad c_{14}^{(\varepsilon)} = - \dfrac{\mathfrak{S}'_{24}(v_\varepsilon)_0}{\mathfrak{S}_{03}} \dfrac{\mathfrak{S}_{13}((w))}{\mathfrak{S}_3((w))}, \\ c_{15}^{(\varepsilon)} = \dfrac{\mathfrak{S}'_{13}(v_\varepsilon)_0}{\mathfrak{S}_{03}} \dfrac{\mathfrak{S}_{24}((w))}{\mathfrak{S}_3((w))}, \qquad c_{16}^{(\varepsilon)} = - \dfrac{\mathfrak{S}'_3(v_\varepsilon)_0}{\mathfrak{S}_{03}} \dfrac{\mathfrak{S}_{03}((w))}{\mathfrak{S}_3((w))}. \end{cases}$$

Introduisons maintenant les quantités u_1, u_2, ω_1, ω_2, ..., et posons

$$(4)\begin{cases} x_5 = \varphi_5((u,\omega,\lambda)), \\ x_1 = \dfrac{\mathrm{al}_1((\omega))\,\mathrm{al}_{24}((\omega))}{\mathrm{al}_{03}((\omega))} \varphi_1((u,\omega,\lambda)), \\ x_{01} = \dfrac{\mathrm{al}_{13}((\omega))\,\mathrm{al}_{01}((\omega))}{\mathrm{al}_{03}((\omega))} \varphi_{01}((u,\omega,\lambda)), \\ x_0 = \dfrac{\mathrm{al}_3((\omega))\,\mathrm{al}_0((\omega))}{\mathrm{al}_{03}((\omega))} \varphi_0((u,\omega,\lambda)), \\ \pi i l_\varepsilon = - \dfrac{\partial \mathfrak{S}_5((w))}{\partial w_\varepsilon}. \end{cases}$$

Nous obtiendrons alors les formules importantes et fondamentales

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x_5}{\partial u_1} &= \frac{\partial \log \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_1} x_5 - \mu_1^2 \mu_\lambda^2 (1+\varkappa^2)^2 \,\mathrm{al}_1((u)) x_1 - \varkappa^2 (1+\mu^2)\,\mathrm{al}_{01}((u))\, x_{01},\\
\frac{\partial x_5}{\partial u_2} &= \frac{\partial \log \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_2} x_5 - \varkappa^2 \mu^2 (1+\mu^2)\,\mathrm{al}_{01}((u)) x_{01} + \varkappa^2 \mu_1^2 \mu_\lambda^2 \,\mathrm{al}_0((u))\, x_0,\\
\frac{\partial x_1}{\partial u_1} &= \frac{\partial \log \mathrm{al}_{24}((\omega))}{\partial \omega_1} x_1 - \mathrm{al}_1((u))\, x_5 - \frac{\varkappa^2}{1+\varkappa^2}\,\mathrm{al}_{01}((u))\, x_0,\\
\frac{\partial x_1}{\partial u_2} &= \frac{\partial \log \mathrm{al}_{24}((\omega))}{\partial \omega_2} x_1 - \frac{\varkappa^2\mu^2}{1+\varkappa^2}\,\mathrm{al}_{01}((u))\, x_0 + \frac{\varkappa^2(1+\mu^2)}{1+\varkappa^2}\,\mathrm{al}_0((u))\, x_{01},\\
\frac{\partial x_{01}}{\partial u_1} &= \frac{\partial \mathrm{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_1} x_{01} + \frac{\mu_1^2\mu_\lambda^2(1+\varkappa^2)}{1+\mu^2}\,\mathrm{al}_1((u))\, x_0 - \frac{1}{1+\mu^2}\,\mathrm{al}_{01}((u))\, x_5,\\
\frac{\partial x_{01}}{\partial u_2} &= \frac{\partial \mathrm{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_2} x_{01} - \frac{\mu^2}{1+\mu^2}\,\mathrm{al}_{01}((u))\, x_5 - \frac{\mu_1^2\mu_\lambda^2(1+\varkappa^2)}{1+\mu^2}\,\mathrm{al}_0((u))\, x_1,\\
\frac{\partial x_0}{\partial u_1} &= \frac{\partial \mathrm{al}_3((\omega))}{\partial \omega_1} x_0 + (1+\varkappa^2)(1+\mu^2)\,\mathrm{al}_1((u))\, x_{01} - (1+\varkappa^2)\,\mathrm{al}_{01}((u))\, x_1,\\
\frac{\partial x_0}{\partial u_2} &= \frac{\partial \mathrm{al}_3((\omega))}{\partial \omega_2} x_0 - (1+\varkappa^2)\,\mu^2\,\mathrm{al}_{01}((u))\, x_1 - \mathrm{al}_0((u))\, x_5.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules on a à poser

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_1} &= \varkappa^2(1+\mu^2)\,\mathrm{al}_{13}((\omega))\,\mathrm{al}_{01}((\omega)),\\
\frac{\partial \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_2} &= -\varkappa^2\mu_1^2\mu_\lambda^2\,\mathrm{al}_3((\omega))\,\mathrm{al}_0((\omega)) + \varkappa^2\mu^2(1+\mu^2)\,\mathrm{al}_{13}((\omega))\,\mathrm{al}_{01}((\omega)),\\
\frac{\partial \mathrm{al}_{24}((\omega))}{\partial \omega_1} &= \mathrm{al}_2((\omega))\,\mathrm{al}_4((\omega)) + 2\varkappa^2(1+\lambda^2)\,\mathrm{al}_{02}((\omega))\,\mathrm{al}_{04}((\omega)),\\
\frac{\partial \mathrm{al}_{24}((\omega))}{\partial \omega_2} &= 2\varkappa^2\mu^2(1+\lambda^2)\,\mathrm{al}_{02}((\omega))\,\mathrm{al}_{04}((\omega)),\\
\frac{\partial \mathrm{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega} &= \mu_1^2\mu_\lambda^2\,\frac{1+\varkappa^2}{1+\mu^2}\,\mathrm{al}_1((\omega))\,\mathrm{al}_3((\omega)) + \frac{1}{1+\mu^2}\,\mathrm{al}_{01}((\omega))\,\mathrm{al}_{03}((\omega)),\\
\frac{\partial \mathrm{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_2} &= \frac{\mu^2}{1+\mu^2}\,\mathrm{al}_{01}((\omega))\,\mathrm{al}_{03}((\omega)),\\
\frac{\partial \mathrm{al}_3((\omega))}{\partial \omega_1} &= \frac{1}{\lambda^2}\,\mathrm{al}_0((\omega))\,\mathrm{al}_{03}((\omega)) - \frac{1}{\lambda^2}\,\mathrm{al}_4((\omega))\,\mathrm{al}_{34}((\omega)),\\
\frac{\partial \mathrm{al}_3((\omega))}{\partial \omega_2} &= \frac{1}{\lambda^2}\,\mathrm{al}_0((\omega))\,\mathrm{al}_{03}((\omega)).
\end{aligned}\right.$$

Divisons les équations (5) respectivement par x_5, x_1, x_{01}, x_0. A l'aide du théorème d'addition, les quotients

$$\frac{x_\alpha}{x_\beta}, \quad \alpha, \beta = 5, 1, 01, 0$$

s'expriment rationnellement par les fonctions hyperelliptiques primitives. Les coefficients sont des fonctions rationnelles de $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 et des fonctions hyperelliptiques des arguments ω_1 et ω_2.

De là on tire le théorème suivant :

Théorème. — *Tous les quotients différentiels du logarithme des fonctions introduites s'expriment rationnellement par les fonctions hyperelliptiques des arguments u_1 et u_2. Les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 et des fonctions hyperelliptiques des arguments ω_1 et ω_2.*

De telles formules peuvent être établies en grand nombre. Nous pouvons les regarder comme analogues à celles, dans la théorie des fonctions elliptiques, qui ont été établies d'abord par Jacobi et se trouvent à la fin du Tome Ier de ses Œuvres complètes ou dans ses travaux sur la rotation d'un corps. Qu'il me soit permis de renvoyer le lecteur, concernant ces théories, à un travail de M. Staude qui a été publié récemment dans les *Acta mathematica*. Il n'entre pas dans mes intentions d'épuiser toute la variété des relations différentielles. Je vais seulement ajouter aux relations déjà établies quelques-unes du second ordre où nous supposons que

$$\pi i l_1 = -\frac{\partial \vartheta_5((w))}{\partial w_1}, \qquad \pi i l_2 = -\frac{\partial \vartheta_5((w))}{\partial w_2}.$$

$$\frac{\partial^2 x_5}{\partial u_1^2} = e'_1 x_5 + e'_2 \,\mathrm{al}_1((u))\, x_1 + e'_3 \,\mathrm{al}_{01}((u))\, x_{01},$$

$$e'_1 = \left[\frac{\partial \log \mathrm{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_1}\right]^2 + \mu_1^2 \mu_\lambda^2 (1+\varkappa^2)^2 \,\mathrm{al}_1((u))^2 + \varkappa^2 \,\mathrm{al}_{01}((u))^2,$$

$$e'_2 = -\mu_1^2 \mu_\lambda^2 (1+\varkappa^2)^2 \left[\frac{\partial \log \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_{24}((\omega))}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_1((u))}{\partial u_1}\right],$$

$$e'_3 = -\varkappa^2 (1+\mu^2) \left[\frac{\partial \log \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_{01}((u))}{\partial u_1}\right];$$

$$\frac{\partial^2 x_5}{\partial u_2^2} = e''_1 x_5 + e''_3 \mathrm{al}_{01}((u))\, x_{01} + e''_4 \mathrm{al}_0((u))\, x_0,$$

$$e''_1 = \left[\frac{\partial \log \mathrm{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_2}\right]^2 + \mu^4 \varkappa^2 \mathrm{al}_{01}((u))^2 - \mu_\lambda^2 \mu_1^2 \varkappa^2 \mathrm{al}_0((u))^2,$$

$$e''_3 = -\varkappa^2 \mu^2 (1 + \mu^2)\left[\frac{\partial \log \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_{01}((u))}{\partial u_2}\right],$$

$$e''_4 = \mu_1^2 \varkappa^2 \mu_\lambda^2 \left[\frac{\partial \log \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_3((\omega))}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_0((u))}{\partial u_2}\right];$$

$$\frac{\partial^2 x_5}{\partial u_1\, du_2} = e'''_1 x_5 + e'''_2 \mathrm{al}_1((u))\, x_1 + e'''_3 \mathrm{al}_{01}((u)) x_{01} + e'''_4 \mathrm{al}_0((u))\, x_0,$$

$$e'''_1 = \frac{\partial \log \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_1}\, \frac{\partial \log \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_2} + \mu_1^2 \mu_\lambda^2 (1 + \varkappa^2)^2 \mathrm{al}_1((u))^2$$
$$+ \mu^2 \varkappa^2 \mathrm{al}_{01}((u))^2 - \mu_\lambda^2 \mu_1^2 \varkappa^2 \mathrm{al}_0((u))^2,$$

$$e'''_2 = -\mu_1^2 \mu_\lambda^2 (1 + \varkappa^2)^2 \left[\frac{\partial \log \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_{24}((\omega))}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_1((u))}{\partial u_2}\right],$$

$$e'''_3 = -\varkappa^2 (1 + \mu^2)\left[\frac{\partial \log \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_{01}((u))}{\partial u_2}\right]$$
$$- \varkappa^2 \mu^2 (1 + \mu^2)\left[\frac{\partial \log \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_{01}((u))}{\partial u_1}\right],$$

$$e'''_4 = \varkappa^2 \mu_1^2 \mu_\lambda^2 \left[\frac{\partial \log \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_3((\omega))}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_0((u))}{\partial u_1}\right].$$

Nous pouvons aisément tirer de ces formules des équations auxquelles les fonctions particulières satisferont et dont on connaît les intégrales. En outre, les modifications les plus variées y sont imaginables et possibles, précisément comme vous l'avez montré pour les fonctions elliptiques dans votre Ouvrage précédemment cité. Il ne me reste plus qu'à montrer qu'il y a en effet des problèmes de Mathématiques appliquées qui conduisent à de telles équations différentielles et quels sont ces problèmes. Je me réserve cette recherche pour une autre occasion.

Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques;

PAR M. SYLOW.

Le but de ce Mémoire est de traiter les principales questions d'Algèbre qui se rattachent aux fonctions elliptiques douées d'une multiplication complexe, en exceptant toutefois la question de l'irréductibilité des équations. Les propriétés les plus importantes de ces fonctions furent en partie trouvées, en partie entrevues par Abel; mais, outre la théorie de la division de la lemniscate et quelques exemples de multiplication complexe, il n'a fait qu'énoncer ses résultats. Plus tard, la multiplication complexe a été l'objet de travaux célèbres de M. Hermite et surtout de M. Kronecker, qui ont confirmé les résultats et les prévisions d'Abel et enrichi la Science de beaucoup de choses nouvelles et extrêmement remarquables. Quoique MM. Kronecker et Hermite aient en partie indiqué les méthodes qui les ont conduits à leurs découvertes, le manque d'une exposition suivie s'est fait sentir; c'est pourquoi, sur l'invitation de l'éminent directeur de ce Journal, j'ai entrepris de rédiger mes recherches sur cette théorie. En attendant, M. G. Pick (*Mathematische Annalen*, t. XXV et XXVI) et M. H. Weber (*Acta mathematica*, t. VI) ont publié des travaux remarquables sur la même matière.

Voici, en peu de mots, l'enchaînement des idées qui m'ont guidé dans la partie la plus essentielle de ces recherches. A l'occasion de la nouvelle édition des *Œuvres d'Abel*, j'eus à me rendre compte de l'exactitude de certaines propositions de ce grand géomètre, énoncées

sans démonstration : par là mon attention fut appelée sur ce fait que, pour les modules de la multiplication complexe, les modules *singuliers* d'après l'expression de M. Kronecker, l'équation de la division des périodes est, dans certains cas, réductible ; il s'ensuit presque immédiatement que, dans les mêmes cas, l'équation modulaire a une ou deux racines rationnelles, pourvu qu'on lui adjoigne la racine carrée du *déterminant*. Les modules transformés étant eux-mêmes singuliers, cette question s'impose : Quel rapport ont ces racines rationnelles de l'équation modulaire avec le module primitif ? La réponse est facile à trouver : elles satisfont à la même équation algébrique. On est ainsi conduit à étudier la résolution de l'équation des modules, et la route à suivre est toute tracée ; on établit sans difficulté que chaque racine s'exprime en fonction rationnelle de chaque autre, et que les symboles de ces fonctions sont échangeables.

Par l'expression *multiplication complexe*, j'entends une formule qui exprime $\lambda\left[(a+bi\sqrt{n})z+\alpha\right]$ en fonction rationnelle de $\lambda(z)$, α étant une constante. J'ai conservé la classification des modules singuliers, à laquelle on est conduit par cette définition ; elle ne coïncide pas avec celle de M. Kronecker, mais le passage de l'une de ces classifications à l'autre est très simple ; je l'indiquerai à la fin du Mémoire. Mon objet étant les questions algébriques, je ne parle qu'occasionnellement des nombreuses relations que possède la théorie des modules singuliers avec l'Arithmétique ; je fais exception seulement pour les formules de M. Kronecker relatives aux nombres des classes, dont je déduis celles que j'ai rencontrées en cherchant les équations des modules singuliers.

I. — Propositions fondamentales.

1. *Notations.* — Nous désignerons, avec MM. Briot et Bouquet, les trois fonctions elliptiques par les symboles λ, μ, ν, de sorte que, en posant

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = z,$$

on a

$$x = \lambda(z), \qquad \sqrt{1-x^2} = \mu(z), \qquad \sqrt{1-k^2x^2} = \nu(z).$$

En représentant par 2ω, ω' un système de périodes elliptiques de la fonction λ, les valeurs du module et de son complément sont définies sans ambiguïté par les formules

$$\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{1}{k}, \qquad \nu\left(\frac{\omega}{2}\right)=k'.$$

Quand nous aurons à parler de la racine carrée du module, nous la supposerons définie, quant au signe, par l'une des équations

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad \lambda\left(\frac{\omega'}{4}\right)=\frac{i}{\sqrt{k}}.$$

Enfin nous désignerons le rapport des périodes par la lettre ζ, en posant

$$\zeta=\frac{\omega'}{2\omega}.$$

2. Si l'on fait

$$\lambda(\varepsilon z+\alpha, k_1)=f[\lambda(z, k)], \tag{1}$$

f dénotant une fonction rationnelle, ε et α étant des constantes, et qu'on désigne par $2\omega_1$, ω'_1 un système de périodes elliptiques relatives au module k_1, cette équation entraîne deux relations de la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} \varepsilon.2\omega=p.2\omega_1+q.\omega'_1, \\ \varepsilon.\ \omega'=p'.2\omega_1+q'.\omega'_1, \end{cases}$$

où p, q, p', q' sont des nombres entiers dont le déterminant $pq'-p'q$, que nous désignerons par n, est nécessairement positif. Réciproquement, si les relations (2) sont satisfaites, il est toujours possible de satisfaire à l'équation (1), et le degré de la fonction rationnelle f sera égal à n. Or, si l'on veut avoir $k_1^2=k^2$, en d'autres termes si l'on veut que l'équation (1) donne lieu à une formule de multiplication, on n'a qu'à faire $\omega_1=\omega$, $\omega'_1=\omega'$; on aura donc, dans ce cas,

$$(3)\qquad \begin{cases} \varepsilon.2\omega=p.2\omega+q\omega', \\ \varepsilon.\ \omega'=p'.2\omega+q'\omega'. \end{cases}$$

Il est facile de voir qu'on obtient, de cette manière, toutes les multiplications possibles; en effet, si les périodes $2\omega_1$, ω'_1 appartiennent au module k, on a

$$2\omega_1 = r.2\omega + s\omega'$$
$$\omega'_1 = r'.2\omega + s'\omega',$$

où $rs' - r's = 1$; donc, en substituant ces valeurs dans l'équation (2), on a un système d'équations analogue au système (3). Les relations (3), bien connues depuis Abel, expriment donc la condition nécessaire et suffisante pour que la multiplication soit possible. On en tire

$$(4)\qquad q\omega'^2 + (p - q')\omega'.2\omega - p'(2\omega)^2 = 0,$$
$$(5)\qquad \varepsilon^2 - (p + q')\varepsilon + pq' - p'q = 0;$$

d'où

$$(6)\qquad \begin{cases} \zeta = \dfrac{\omega'}{2\omega} = \dfrac{-p + q' + i\sqrt{4n - (p + q')^2}}{2q}, \\ \varepsilon = p + q\zeta = \frac{1}{2}\left[p + q' + i\sqrt{4n - (p + q')^2}\right]. \end{cases}$$

Les équations (6) ne sont sujettes qu'à une seule exception; quand on a

$$p' = q = 0, \qquad p = q' = \varepsilon,$$

ζ est indéterminé; c'est le cas de la multiplication ordinaire.

Dans tout autre cas, on a une *multiplication complexe,* car, ζ étant toujours imaginaire, le nombre $4n - (p + q')^2$ est positif. Puisque dans l'expression de ζ le coefficient de i est essentiellement positif, le radical $\sqrt{4n - (p + q')^2}$ doit être positif ou négatif en même temps que q. Or, en changeant au besoin le signe de ε dans les équations (3), nous pouvons supposer q et $\sqrt{4n - (p + q')^2}$ positifs; cela étant, l'égalité

$$4n - (p + q')^2 = -4p'q - (p - q')^2$$

fait voir que p' est négatif.

3. A chaque module répondent évidemment une infinité de valeurs du multiplicateur ε; cherchons donc la valeur de ε, pour laquelle le degré n de la fonction f est le moindre possible. D'après le numéro précédent, les périodes elliptiques satisfont à une relation de la forme

$$A\omega'^2 + B\omega'.2\omega + C.(2\omega)^2 = 0,$$

où A et C sont positifs, et où il est permis de supposer que A, B et C n'aient pas de diviseur commun. En la comparant à l'équation (4) et désignant par m le plus grand diviseur commun des nombres q, $p-q'$, $-p'$, on a

$$q = mA, \qquad p - q' = mB, \qquad -p' = mC.$$

Faisant

$$p = \tfrac{1}{2}mB + r, \qquad q' = -\tfrac{1}{2}mB + r,$$

on en tire

$$n = pq' - p'q = r^2 + m^2(AC - \tfrac{1}{4}B^2),$$

ce qui fait voir qu'on a la plus petite valeur de n en faisant $m = 1$, $r = 0$ si B est un nombre pair, mais $m = 1$, $r^2 = \frac{1}{4}$ si B est impair. On a ainsi deux cas :

Premier cas. — Le rapport des périodes satisfait à l'équation

$$a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0,$$

d'où

$$n = ac - b^2, \qquad \zeta = \frac{-b + i\sqrt{n}}{a};$$

on a la plus simple multiplication complexe en posant

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon.2\omega &= b.2\omega + a\omega', \\ \varepsilon.\ \omega' &= -c.2\omega - b\omega', \\ \varepsilon &= i\sqrt{n}; \end{aligned} \right.$$

une multiplication quelconque est définie par les équations

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} (x + yi\sqrt{n})\,2\omega &= (x + yb).2\omega + ya\omega', \\ (x + yi\sqrt{n})\ \ \omega' &= -yc.2\omega + (x - yb)\omega', \end{aligned} \right.$$

x et y étant des entiers, et son degré est égal à $x^2 + y^2 n$.

Second cas. — Le rapport ζ satisfait à l'équation

$$a\zeta^2 + (2b+1)\zeta + c = 0,$$

d'où

$$n = ac - b(b+1), \qquad \zeta = \frac{-(2b+1) + i\sqrt{4n-1}}{2a};$$

on a les multiplications complexes du plus petit degré possible, en adoptant l'un ou l'autre des deux systèmes de formules

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon . 2\omega = (b+1)2\omega + a\omega', & \varepsilon . 2\omega = b . 2\omega + a\omega', \\ \varepsilon . \ \omega' = -c . 2\omega - b\omega', & \varepsilon . \ \omega' = -c . 2\omega - (b+1)\omega', \\ \quad \varepsilon = \dfrac{1 + i\sqrt{4n-1}}{2}, & \quad \varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{4n-1}}{2}. \end{array} \right.$$

Une multiplication quelconque est définie par les équations suivantes :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x + yi\sqrt{4n-1}}{2} . 2\omega = \left(\dfrac{x+y}{2} + yb\right) 2\omega + ya\omega', \\ \dfrac{x + yi\sqrt{4n-1}}{2} \quad \omega' = -yc . 2\omega + \left(\dfrac{x-y}{2} - yb\right)\omega'; \end{array} \right.$$

son degré est égal à $\frac{1}{4}[x^2 + y^2(4n-1)]$; x et y sont des nombres entiers de la même parité. On voit que, si x et y sont pairs, les équations (10) rentrent dans les équations (8).

Dans les deux cas, les trois coefficients de l'équation en ζ n'ont pas de diviseur commun; a et c sont positifs; de même, $\sqrt{n}$ et $\sqrt{4n-1}$ désignent des quantités positives. Le nombre n sera appelé le degré du module, et nous dirons qu'un module singulier appartient à la première ou à la seconde espèce, suivant qu'il rentre dans le premier ou dans le second des cas dont nous venons de parler. On verra en effet, au numéro suivant, qu'un module ne peut appartenir qu'à un seul de ces cas.

4. On a vu que le rapport des périodes elliptiques satisfait à une équation de la forme

$$(11) \qquad A\zeta^2 + B\zeta + C = 0.$$

Réciproquement, toute équation de second degré à coefficients entiers définit un module singulier, pourvu que ses racines ne soient pas réelles. En effet, le module et la période 2ω se déterminent par les formules

$$(12)\qquad \begin{cases} \sqrt{k} = 2\sqrt[4]{q}\displaystyle\prod_1^{\infty}\left(\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}}\right)^2, \\ \omega = \pi\displaystyle\prod_1^{\infty}\left(\frac{1-q^{2m}}{1-q^{2m-1}}\cdot\frac{1+q^{2m-1}}{1+q^{2m}}\right)^2, \\ \text{où} \\ q = e^{2\pi i\zeta}, \qquad \sqrt[4]{q} = e^{\frac{\pi}{2}i\zeta}. \end{cases}$$

Or, en faisant $\omega' = 2\omega\zeta$, la fonction $\lambda(z, k)$ admet les périodes elliptiques 2ω et ω', et l'on a, pour la plus simple multiplication complexe, les formules du numéro précédent. Des formules (12), on peut aussi conclure que, si les équations (3) du n° **2** sont satisfaites, on a non seulement $k_1^2 = k^2$, mais aussi $\sqrt{k_1} = \sqrt{k}$.

Supposons maintenant qu'une autre équation du second degré

$$(13)\qquad A_1\zeta_1^2 + B_1\zeta_1 + C_1 = 0$$

donne la même valeur de k^2 que l'équation (11), et soient $2\omega_1$, ω'_1 les périodes qu'on obtient par les formules (12), en y remplaçant ζ par ζ_1. La fonction $\lambda(z, k)$ admet des périodes élémentaires $2\omega_1$ et ω'_1, quoiqu'elles ne soient pas nécessairement des périodes elliptiques du module k; donc on a

$$2\omega = r\,.\,2\omega_1 + s\omega'_1,$$

$$\omega' = r'.\,2\omega_1 + s'\omega'_1,$$

d'où

$$\zeta = \frac{r' + s'\zeta_1}{r + s\zeta_1},$$

et l'on a

$$rs' - r's = \pm 1;$$

mais, comme le coefficient de i dans l'expression de ζ_1 doit être positif, on a

$$rs' - r's = 1.$$

En faisant cette substitution, il faut que l'équation (11) se change en (13); en d'autres termes, il faut que les formes quadratiques

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 \quad \text{et} \quad A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2$$

soient proprement équivalentes.

A chaque équation du second degré définissant une valeur de ζ, nous ferons correspondre une forme quadratique à déterminant négatif. Dans le premier des cas dont il est parlé au numéro précédent, où l'équation est

$$a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0,$$

la forme correspondante sera (a, b, c); dans le second cas, au contraire, où l'on a

$$a\zeta^2 + (2b+1)\zeta + c = 0,$$

nous prendrons pour forme correspondante $(2a, 2b+1, 2c)$. Une première condition à remplir pour que deux valeurs de ζ donnent la même valeur de k^2 est donc que les formes quadratiques correspondantes appartiennent à la même classe. Ainsi, tout module singulier de la première espèce du degré n appartient à une classe proprement primitive du déterminant $-n$, tout module de la seconde espèce à une classe improprement primitive du déterminant $-(4n-1)$, d'où l'on voit que les deux espèces sont réellement distinctes. Nous appellerons $-n$ ou $-(4n-1)$ le *déterminant du module singulier*.

A chaque classe de formes répondent plusieurs valeurs de k^2. Pour en déterminer le nombre et pour trouver les relations qui les font dépendre les unes des autres, nous ferons usage des transformations linéaires de la fonction $\lambda(z)$.

II. — Les transformations linéaires. Les plus simples modules singuliers.

5. Pour avoir tous les modules qui répondent à la même classe de formes quadratiques que le module k, il faut substituer à ζ l'expression

$$\frac{r' + s'\zeta_1}{r + s\zeta_1},$$

r, s, r', s' étant des entiers satisfaisant à l'équation

$$rs' - r's = 1,$$

ce qui équivaut à effectuer la transformation linéaire $\begin{pmatrix} r & s \\ r' & s' \end{pmatrix}$ définie par les équations

$$\varepsilon' . 2\omega = r . 2\omega_1 + s\omega'_1,$$
$$\varepsilon' . \ \omega' = r' . 2\omega_1 + s'\omega'_1 .$$

On sait que le carré k_1^2 du module transformé a l'une des six valeurs suivantes :

$$(14) \quad k^2, \quad \frac{1}{k^2}, \quad \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^4, \quad \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^4, \quad \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^4, \quad \left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^4,$$

et l'on vérifie sans difficulté que ces valeurs répondent respectivement aux six suppositions suivantes :

$$s \equiv 0, \qquad s \equiv 2, \qquad s' \equiv 0,$$
$$s' \equiv 2, \qquad s \equiv s' \equiv \pm 1, \qquad s \equiv - s' \equiv \pm 1 \qquad (\text{mod } 4).$$

En employant les transformations linéaires, il faut supposer connu $\sqrt{k}$; souvent il nous faudra aussi pousser la distinction jusqu'à la détermination complète de $\sqrt{k_1}$. Voici le Tableau complet des formules de transformations, où l'on a écrit $\lambda_1(\theta)$ au lieu de $\lambda(\theta, k_1)$.

A, $s \equiv 0$ (mod 4) :

$$\sqrt{k_1} = i^{-r's'}\sqrt{k}, \qquad \varepsilon' = (-1)^{\frac{r-1}{2}}, \qquad \lambda_1(\varepsilon'\theta) = \varepsilon'\lambda(\theta).$$

B, $s \equiv 2$ (mod 4) :

$$\sqrt{k_1} = \frac{i^{-r's'}}{\sqrt{k}}, \qquad \varepsilon' = (-1)^{\frac{r-1}{2}+r'} k, \qquad \lambda_1(\varepsilon'\theta) = \varepsilon'\lambda(\theta).$$

C, $r \equiv s' \equiv 0$ (mod 2) :

$$\alpha = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega'_1}{4}, \qquad \sqrt{k_1} = (-1)^{\frac{r}{2}} \frac{1-(-1)^{\frac{s'}{2}}\sqrt{k}}{1+(-1)^{\frac{s'}{2}}\sqrt{k}};$$

$$\varepsilon' = \frac{i^s}{2}\left[1 + (-1)^{\frac{s'}{2}}\sqrt{k}\right]^2, \qquad \lambda_1(\varepsilon'\theta + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{k_1}} \frac{1 + (-1)^{\frac{s+s'-1}{2}}\sqrt{k}\,\lambda(\theta)}{1 - (-1)^{\frac{s+s'-1}{2}}\sqrt{k}\,\lambda(\theta)}.$$

D, $r \equiv 0$, $s \equiv r' \equiv s' \equiv 1 \pmod{2}$:

$$\alpha = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega'_1}{4}, \qquad \sqrt{k_1} = (-1)^{\frac{r}{2}} \frac{1 + i^{ss'}\sqrt{k}}{1 - i^{ss'}\sqrt{k}},$$

$$\varepsilon' = \frac{i^s}{2}(1 - i^{ss'}\sqrt{k})^2, \qquad \lambda_1(\varepsilon'\theta + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{k_1}} \frac{1 - i^{s'}\sqrt{k}\,\lambda(\theta)}{1 + i^{s'}\sqrt{k}\,\lambda\theta}.$$

E, $s' \equiv 0$, $r \equiv r' \equiv s \equiv 1 \pmod{2}$:

$$\alpha = \frac{\omega'_1}{4}, \qquad \sqrt{k_1} = i^{-rs} \frac{1 - (-1)^{\frac{s'}{2}}\sqrt{k}}{1 + (-1)^{\frac{s'}{2}}\sqrt{k}},$$

$$\varepsilon' = \frac{i^s}{2}\left[1 + (-1)^{\frac{s'}{2}}\sqrt{k}\right]^2, \qquad \lambda_1(\varepsilon'\theta + \alpha) = \frac{i}{\sqrt{k_1}} \frac{1 + (-1)^{\frac{s+s'-1}{2}}\sqrt{k}\,\lambda(\theta)}{1 - (-1)^{\frac{s+s'-1}{2}}\sqrt{k}\,\lambda(\theta)}.$$

F, $r' \equiv 0$, $r \equiv s \equiv s' \equiv 1 \pmod{2}$:

$$\alpha = \frac{\omega'_1}{4}, \qquad \sqrt{k_1} = i^{-rs} \frac{1 - i^{-ss'}\sqrt{k}}{1 + i^{-ss'}\sqrt{k}},$$

$$\varepsilon' = \frac{i^s}{2}(1 + i^{-ss'}\sqrt{k})^2, \qquad \lambda_1(\varepsilon'\theta + \alpha) = \frac{i}{\sqrt{k_1}} \frac{1 - i^{s'}\sqrt{k}\,\lambda(\theta)}{1 + i^{s'}\sqrt{k}\,\lambda(\theta)}.$$

Remarquons que les formules qui donnent les valeurs de $\sqrt{k_1}$ et ε' dans le cas F embrassent celles des cas C, D, E.

Dans les cas C, D, E, F, la dernière formule peut être remplacée par la suivante :

$$\lambda_1(\varepsilon'\theta) = \frac{2\varepsilon'\lambda(\theta)}{1 + \mu(\theta)\nu(\theta) - (-1)^{\frac{s}{2}} k \lambda^2\theta}.$$

Supposons maintenant $\sqrt{k}$ défini par l'équation

(15) $$A\zeta^2 + B\zeta + C = 0,$$

laquelle, en faisant

$$\zeta = \frac{r' + s'\zeta_1}{r + s\zeta_1},$$

se change en

(16) $$A_1\zeta_1^2 + B_1\zeta_1 + C_1 = 0.$$

où, par conséquent,

$$A_1 = As'^2 + Bs's + Cs^2; \tag{17}$$

le carré k_1^2 du module transformé a l'une des six valeurs (14). Il y a donc généralement six valeurs du carré du module pour chaque classe de formes quadratiques; cette règle ne souffre d'exceptions que dans les cas où quelques-unes des valeurs (14) coïncident, c'est-à-dire pour les modules qu'on trouve en faisant $\sqrt{k_1} = \sqrt{k}$, et que nous appellerons, dans la suite, *modules singuliers linéaires*.

D'après ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent, on peut classifier les modules singuliers d'après les déterminants des formes correspondantes; ainsi un module de la première espèce du déterminant $-$ D est du degré D, et son plus simple multiplicateur est $i\sqrt{D}$; au contraire, un module de la seconde espèce est du degré $\frac{1}{4}(D+1)$, ses plus simples multiplicateurs sont $\frac{1}{2}(\pm 1 + i\sqrt{D})$. Nous nous servirons aussi d'une autre classification : les modules pour lesquels le coefficient A est un nombre pair seront appelés *modules de la première catégorie*, les autres *modules de la seconde catégorie*. En effet, on verra plus tard que les équations algébriques qui déterminent les modules singuliers diffèrent, et suivant l'espèce et suivant la catégorie.

Supposons que le module primitif k soit de la première espèce et de la première catégorie; A et B sont pairs, C impair, et par suite A_1 est pair ou impair en même temps que s. Donc, les deux premières des valeurs (14) appartiennent à la première catégorie, les quatre dernières à la seconde.

Si k est de la seconde espèce, le déterminant $4AC - B^2$ est égal à $4n - 1$, n désignant le degré du module. Si maintenant n est impair, et par conséquent $4AC - B^2 = 8h + 3$, A est nécessairement impair; donc, dans ce cas, la seconde catégorie existant seule, toutes les six valeurs (14) lui appartiennent. Au contraire, si n est pair, le déterminant est de la forme $8h - 1$, donc AC est pair. En supposant que k appartienne à la première catégorie, la congruence

$$A_1 = As'^2 + Bss' + Cs^2 \equiv s(Bs' + Cs) \pmod 2$$

fait voir que $\frac{1}{k^2}$ y appartient aussi. Au reste, il y a deux cas à consi-

dérer : si C est pair, A_1 devient pair si s est impair, s' pair; mais il est impair si s et s' sont impairs : donc les valeurs $\left(\frac{1 \pm \sqrt{k}}{1 \mp \sqrt{k}}\right)^4$ appartiennent à la première catégorie, $\left(\frac{1 \pm i\sqrt{k}}{1 \mp i\sqrt{k}}\right)^4$ à la seconde; si C est impair, l'inverse a lieu. Donc, parmi les six valeurs (14), quatre appartiennent à la première catégorie, deux seulement à la seconde.

Dans tous les cas, k^2 et $\frac{1}{k^2}$ sont de la même catégorie.

Voici encore une application des transformations linéaires qui nous sera utile dans la suite. En posant $\zeta = x + yi$ et faisant croître indéfiniment y, on a

$$q = 0,$$

et, par suite,

$$\sqrt{k} = 0;$$

en même temps, ζ_1 devient égal à $-\frac{r}{s}$, $\sqrt{k_1}$ prend l'une des valeurs 0, ∞, ± 1, $\pm i$. A la vérité, on ne peut pas dire que réciproquement $\sqrt{k_1}$ prend l'une de ces valeurs quand ζ_1 converge vers $-\frac{r}{s}$, puisque l'équation $\zeta_1 = -\frac{r}{s}$ n'entraîne pas $y = \infty$, mais seulement $\zeta = \infty$. Cependant, la remarque suivante nous suffira. On sait que, si l'affixe de ζ_1 se meut sur un cercle dont le centre est situé sur l'axe réel, l'affixe de ζ se meut également sur un cercle dont le centre se trouve sur le même axe. Or, si le premier cercle passe par le point de l'axe réel dont l'abscisse est $-\frac{r}{s}$, le second cercle, ayant un point à l'infini, devient une droite perpendiculaire à l'axe; donc, dans ce cas, on a bien $y = \infty$ pour $\zeta_1 = -\frac{r}{s}$. En déterminant la valeur de $\sqrt{k_1}$ au moyen du tableau, on a ainsi le résultat suivant. Quand ζ_1 converge vers l'une des valeurs

$$\frac{2\rho + 1}{4\sigma}, \quad \frac{2\rho + 1}{4\sigma + 2}, \quad \frac{4\rho}{2\sigma + 1}, \quad \frac{4\rho + 2}{2\sigma + 1}, \quad \frac{4\rho \pm 1}{4\sigma \pm 1}, \quad \frac{4\rho \pm 1}{4\sigma \mp 1},$$

son affixe décrivant un arc de cercle dont le centre est situé sur l'axe

réel, $\sqrt{k_1}$ convergera respectivement vers les valeurs

$$0, \quad \infty, \quad 1, \quad -1, \quad i, \quad -i.$$

6. Les modules singuliers linéaires se trouvent presque sans calcul, au moyen du tableau. Pour avoir ceux de la première espèce, il faut employer les cas où r et s' sont de la même parité, les cas B, C, F.

Dans le cas B, il faut prendre r' impair, par exemple

$$\varepsilon.2\omega = -2\omega + 2\omega',$$
$$\varepsilon.\ \omega' = -2\omega + \omega';$$

d'où

$$2\zeta^2 - 2\zeta + 1 = 0, \qquad \zeta = \frac{1+i}{2}, \qquad \varepsilon = i,$$
$$k = i, \qquad k^2 = -1, \qquad \lambda(i\theta) = i\lambda(\theta).$$

Du cas C, on tire

$$\sqrt{k} = \pm\sqrt{2} - 1, \qquad k = 3 \mp 2\sqrt{2}, \qquad k^2 = 17 \mp 12\sqrt{2};$$

on peut faire, par exemple,

$$\varepsilon.2\omega = \omega', \qquad \varepsilon\omega' = -2\omega,$$

d'où

$$\zeta = \varepsilon = i, \qquad \lambda\left(i\theta + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{1-\sqrt{k}\,\lambda(\theta)}{1+\sqrt{k}\,\lambda(\theta)}$$

ou bien

$$\lambda(i\theta) = \frac{2i\lambda(\theta)}{1+\mu(\theta)\nu(\theta) - k\lambda^2(\theta)}.$$

Il est facile de prévoir qu'on n'aura pas d'autres valeurs de k^2. A l'unique classe du déterminant -1 répondent donc, au lieu de six, seulement trois valeurs de k^2, dont l'une de la première catégorie, deux de la seconde.

Les cas D et E donnent les modules de la seconde espèce répondant à l'unique classe improprement primitive du déterminant -3. On

trouve, en faisant $r \equiv 0$, $s \equiv s'$ (mod 4),

$$\sqrt{k} = \frac{1+i}{2}(-1 \pm \sqrt{3}), \qquad k = i(2 \mp \sqrt{3}), \qquad k^2 = -(7 \mp 4\sqrt{3}).$$

On peut faire

$$\zeta^2 - \zeta + 1 = 0, \qquad \zeta = \varepsilon = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$\lambda\left(\varepsilon\theta + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1 + i\sqrt{k}\,\lambda(\theta)}{1 - i\sqrt{k}\,\lambda(\theta)}$$

ou bien

$$\lambda(\varepsilon\theta) = \frac{2\varepsilon\lambda(\theta)}{1 + \mu(\theta)\nu(\theta) + k\lambda^2(\theta)}.$$

On ne trouve pas d'autres valeurs de k^2; ici l'on a donc seulement deux valeurs de k^2 au lieu de six.

7. On a vu que les carrés des modules singuliers linéaires sont tous réels, ceux de la seconde catégorie de la première espèce positifs, les autres négatifs. Recherchons dans quels cas le carré d'un module non linéaire k est réel. Soit (a, b, c) une des formes quadratiques qui lui correspondent; le rapport des périodes satisfait à l'équation

$$a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0.$$

En remarquant que dans les formules (12) on a

$$q = e^{2\pi i\zeta} = e^{-\frac{\pi 2\sqrt{D}}{a}}\left(\cos\frac{2\pi b}{a} - i\sin\frac{2\pi b}{a}\right),$$

on voit que, si k^2 est réel, il est identique au carré du module défini par l'équation

$$a\zeta^2 - 2b\zeta + c = 0,$$

d'où il suit que les formes (a, b, c) et $(a, -b, c)$ sont proprement équivalentes. Les valeurs réelles de k^2 appartiennent donc toujours aux classes ambiguës. Si k^2 est positif, nous pouvons supposer que la valeur de $\sqrt{k}$ définie par l'équation en ζ soit réelle; alors $\frac{1}{k^2}$, $\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^4$,

$\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^4$ sont aussi réels et positifs. Au contraire, $\left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^4$, $\left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^4$ sont généralement imaginaires; les modules linéaires seuls font exception; car, si l'une de ces deux quantités est réelle, elle se confond avec l'autre, ce qui n'arrive que pour les modules linéaires. Si k^2 est réel et négatif, nous pouvons supposer $\sqrt{k}$ égal à $(1+i)\alpha$, α étant réel; d'où

$$\left(\frac{1\mp\sqrt{k}}{1\pm\sqrt{k}}\right)^4=\left[\frac{1\mp(1+i)\alpha}{1\pm(1+i)\alpha}\right]^4,\quad \left(\frac{1\pm i\sqrt{k}}{1\mp i\sqrt{k}}\right)^4=\left[\frac{1\mp(1-i)\alpha}{1\pm(1-i)\alpha}\right]^4;$$

alors $\frac{1}{k^2}$ sera réel et négatif; mais les carrés des autres modules qui appartiennent à la même classe que k^2 seront généralement imaginaires, et évidemment il n'y a d'exceptions que pour les modules linéaires. Or on sait (Gauss, *Disquis. arithm.*, art. 257, 258) que chaque classe ambiguë contient une forme de l'un des deux types $\left(a,\ 0,\ \frac{D}{a}\right)$, $\left(a,\ \frac{1}{2}a,\ \frac{a^2+4D}{4a}\right)$, où dans la seconde a est pair. Dans le cas du premier type la classe donne évidemment quatre valeurs de k^2 réelles et positives. Dans le cas du second type on a l'équation

$$a\zeta^2+a\zeta+\frac{a^2+4D}{4a}=0;$$

en y faisant $\zeta=\zeta_1-1$, et désignant la nouvelle valeur de $\sqrt{k}$ par $\sqrt{k_1}$, on a

$$a\zeta_1^2-a\zeta_1+\frac{a^2+4D}{4a}=0,\qquad \sqrt{k_1}=i\sqrt{k};$$

donc, en posant $\sqrt{k}=u+vi$, u et v étant réels, on a

$$i\sqrt{k}=u-vi,$$

d'où

$$k^2=-(u^2+v^2)^2;$$

par conséquent la classe donne deux valeurs de k^2 réelles et négatives.

Cela posé, considérons les divers cas, en désignant par μ le nombre des diviseurs premiers impairs de D.

Si $D = 4h + 1$, il y a $2^{\mu-1}$ classes appartenant à chacun des deux types. Celles du premier type donnent $2^{\mu+1}$ valeurs réelles et positives de k^2, et, puisque a et $\frac{D}{a}$ sont impairs, il est facile de voir qu'elles appartiennent toutes à la seconde catégorie. Les autres donnent 2^{μ} valeurs réelles et négatives de k^2 appartenant à la première catégorie.

Si $D = 4h - 1$, il y a $2^{\mu-1}$ classes proprement primitives du premier type; donc la première espèce contient $2^{\mu+1}$ modules dont les carrés sont réels et positifs, tous appartenant à la seconde catégorie. De plus, il est facile de voir qu'il existe $2^{\mu-1}$ classes improprement primitives du second type, qui donnent 2^{μ} modules de la seconde espèce dont les carrés sont réels et négatifs; ces modules sont tous de la seconde catégorie.

Si D est pair mais non divisible par 8, on a 2^{μ} classes, toutes du premier type. En prenant a pair et par conséquent $\frac{D}{a}$ impair, on voit qu'il y a $2^{\mu-1}$ modules réels de chaque catégorie.

Enfin, si D est divisible par 8, il y a 2^{μ} classes de chaque type. Celles du premier type donnent $2^{\mu-1}$ modules réels de chaque catégorie; celles du second type donnent $2^{\mu+1}$ modules de la première catégorie dont les carrés sont réels et négatifs.

III. — Formation des équations algébriques dont dépendent les modules singuliers, et des formules de multiplication complexe.

8. Pour trouver les formules de la multiplication complexe la plus simple que comporte un module singulier défini par le rapport des périodes, et pour déterminer algébriquement ce module, il suffit de trouver les formules de transformation qui répondent aux équations (7) et (9). Rappelons d'abord quelques points de la théorie de la transformation

Considérons les équations

$$(18)\qquad \begin{cases} \varepsilon.2\omega = r.2\omega_1 + s\,\omega'_1, \\ \varepsilon.\ \ \omega' = r'.2\omega_1 + s'\omega'_1, \end{cases}\qquad rs' - r's = n,$$

et la formule de transformation correspondante

$$\lambda(\varepsilon\theta + \alpha, k_1) = f[\lambda(\theta)].$$

Au moyen de la relation $\lambda(\omega - \theta) = \lambda(\theta)$, on trouve pour la constante α l'expression suivante

$$\alpha = (2p + 1 - r)\frac{\omega_1}{2} + (2q - s)\frac{\omega'_1}{4},$$

où, en changeant convenablement la fonction rationnelle f, on peut choisir arbitrairement les nombres p et q. Il en résulte qu'on peut faire

$$\alpha = 0, \text{ si } s \text{ est pair, } r \text{ impair,}$$

$$\alpha = \frac{\omega_1}{2}, \text{ si } s \text{ et } r \text{ sont pairs,}$$

$$\alpha = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega'_1}{4}, \text{ si } s \text{ est impair, } r \text{ pair.}$$

$$\alpha = \frac{\omega'_1}{4}, \text{ si } s \text{ et } r \text{ sont impairs.}$$

Des équations (18) on tire

$$2\omega_1 = \varepsilon\,\frac{s'.2\omega - s\omega'}{n},\qquad \omega'_1 = \varepsilon\,\frac{-r'.2\omega + r\omega'}{n},$$

d'où l'on voit que les n valeurs différentes de $\lambda(\theta)$ qui répondent à une même valeur de $\lambda(\varepsilon\theta + \alpha, k_1)$ sont contenues dans l'expression

$$(19)\qquad \lambda\left(\theta + m\,\frac{s'.2\omega - s\omega'}{n} + \mu\,\frac{-r'.2\omega + r\omega'}{n}\right).$$

Dans la suite nous aurons à considérer les cas où les quatre nombres r, s, r', s' n'ont pas de diviseur commun; en désignant par δ le

plus grand commun diviseur de r et de s, posons

(20) $r = \rho\delta, \qquad s = \sigma\delta, \qquad$ et par suite $\qquad n = \delta(\rho s' - r'\sigma) = \delta n'.$

Or, en faisant

$$(21) \qquad \begin{cases} \mu\rho - m\sigma = 1, \\ -\mu r' + ms' = t, \end{cases}$$

l'expression (19) devient

$$\lambda\left(\theta + \frac{t.2\omega + \delta\omega'}{\delta n'}\right).$$

Dans cette expression on peut rendre t premier à δ; car premièrement le plus grand commun diviseur de t et de n' est premier à δ; on tire, en effet, des équations (21)

$$\mu(\rho s' - r'\sigma) = \mu n' = \sigma t + s',$$
$$m(\rho s' - r'\sigma) = mn' = \rho t + r';$$

donc un diviseur commun à t et à n' divise r' et s', et par conséquent il est premier à δ. Secondement, si t et δ admettent un diviseur commun, on peut remplacer μ et m respectivement par $\mu + h\sigma$ et $m + h\rho$, ce qui revient à remplacer t par $t + hn'$; or, puisque t et n' n'ont pas un même diviseur commun avec δ, on peut choisir h de manière à rendre $t + hn'$ premier à δ.

En faisant, pour abréger,

$$\Omega = t.2\omega + \delta\omega',$$

on voit que les n valeurs de l'expression (19) peuvent être représentées par

(22) $\qquad \lambda\left(\theta + \frac{p\Omega}{n}\right), \qquad$ où $\qquad p = 0, 1, 2, \ldots (n-1).$

Si l'on pose

$$n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} q_3^{\beta_3} \ldots,$$

$q_1, q_2, q_3, \ldots$ étant les diviseurs premiers de n, le nombre N des périodes Ω qui donnent des transformations différentes est déterminé par l'équation

$$(23) \qquad N = q_1^{\beta_1-1}(q_1+1)\,q_2^{\beta_2-1}(q_2+1)\,q_3^{\beta_3-1}(q_3+1)\ldots.$$

A chacune de ces N valeurs de Ω répondent plusieurs transformations ; on en peut choisir une, qui donne les formules les plus simples, et que nous appellerons la *transformation principale*. Ces transformations seront choisies de telle manière que les modules correspondants satisfassent à une même équation algébrique, dépourvue de racines étrangères à la question, et qui d'ailleurs, pour les degrés pairs, se décompose en deux ou en plusieurs facteurs. On sait que, la transformation principale étant connue, les autres transformations répondant à la même valeur de Ω s'en déduisent au moyen des transformations linéaires. Soient

$$\begin{aligned}\varepsilon_0\,.\,2\omega &= r_0\,.\,2\omega_0 + s_0\,\omega'_0,\\ \varepsilon_0\,.\quad \omega' &= r'_0\,.\,2\omega_0 + s'_0\,\omega'_0\end{aligned}$$

les équations qui définissent la transformation principale, et

$$Y = \lambda(\varepsilon_0\theta + \alpha_0, k_0)$$

la fonction transformée; soient de plus

$$\begin{aligned}\varepsilon'\,.\,2\omega_0 &= r_1\,.\,2\omega_1 + s_1\,\omega'_1,\\ \varepsilon'\,.\quad \omega'_0 &= r'_1\,.\,2\omega_1 + s'_1\,\omega'_1\end{aligned}$$

les équations de la transformation linéaire qu'il faut employer pour avoir la transformation (18), on a

$$(24) \qquad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon', \qquad r = r_0 r_1 + s_0 r'_1, \qquad s = r_0 s_1 + s_0 s'_1,\\ & r' = r'_0 r_1 + s'_0 r'_1, \qquad s' = r'_0 s_1 + s'_0 s'_1.\end{aligned}\right.$$

Ayant déterminé au moyen de ces équations les nombres r_1, s_1, r'_1, s'_1, ou seulement leurs valeurs (mod 4), le tableau des transformations

linéaires donne $\lambda(\varepsilon\theta + \alpha, k_1)$ en fonction linéaire de Y, et, par suite, en fonction rationnelle de $\lambda(\theta)$. De plus on a $\sqrt{k_0}$ exprimé en fonction linéaire de $\sqrt{k_1}$; en substituant cette expression dans l'équation modulaire principale, on trouve l'équation modulaire répondant au genre de transformations en question.

Cela posé, si l'on veut avoir la multiplication complexe définie par un système d'équations de la forme (7) ou (9), on n'a qu'à identifier les équations en question avec les équations (18) en faisant

$$\omega_1 = \omega, \qquad \omega'_1 = \omega', \qquad \sqrt{k_1} = \sqrt{k}.$$

On a ainsi $\lambda(\varepsilon\theta + \alpha, k)$ en fonction rationnelle de $\lambda(\theta)$, ou bien, si l'on veut, $\lambda(\varepsilon\theta)$ en fonction rationnelle de $\lambda(\theta)$ et de $\mu(\theta)\,\nu(\theta)$; de plus on obtient une équation algébrique satisfaite par le module k. Les équations qu'on obtient de cette manière ne sont pas libres de racines étrangères à la question; elles peuvent avoir les racines $k = 0$, $k = \pm 1$, et elles sont généralement satisfaites par des modules singuliers d'un degré moindre que n. Il faut maintenant trouver les racines étrangères et déterminer la multiplicité de chaque racine.

Les relations modulaires s'expriment par des équations en $\sqrt{k_1}$, en k_1, ou en k_1^2. Pour embrasser ces trois cas dans une même expression, dénotons l'équation modulaire dont il s'agit par $F(\xi, \eta) = 0$, ξ et η désignant respectivement ou $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k_1}$, ou k et k_1, ou enfin k^2 et k_1^2. Ainsi l'équation dont il faut chercher les racines est

$$(25) \qquad F(\xi, \xi) = 0,$$

Soit, en *premier lieu*, l un module de la première espèce, déterminé par la racine $\xi = \xi_0$ de l'équation (25); désignons par n_1 son degré, par 2ϖ, ϖ' un couple de périodes elliptiques, par ζ_1 leur rapport, et soit

$$(26) \qquad a_1\zeta_1^2 + 2b_1\zeta_1 + c_1 = 0, \qquad a_1c_1 - b_1^2 = n_1.$$

Par hypothèse il existe une multiplication complexe du degré n, qui

d'après le n° **3** est définie par les équations

$$(27)\qquad \begin{cases} (x+yi\sqrt{n_1})2\varpi = (x+yb_1)2\varpi + ya_1\varpi', \\ (x+yi\sqrt{n_1})\ \varpi' = -yc_1.2\varpi + (x-yb_1)\varpi', \\ x^2+y^2n_1 = n. \end{cases}$$

On voit que les quantités $\lambda\left(\theta+\frac{p\Omega}{n}\right)$ et, par suite, la transformation principale sont complètement déterminées par ces équations, de sorte que pour chaque couple de valeurs de x et de y il n'y a qu'une seule racine de l'équation modulaire principale. Donc, si les racines de cette équation et de l'équation $F(\xi, \eta) = 0$ se correspondent une à une, on peut conclure que chaque valeur de $x+yi\sqrt{n_1}$ ne peut répondre qu'à une seule racine de la dernière équation. Le contraire ne se rencontre que dans le cas des modules de la seconde catégorie d'un degré pair, où, comme on le verra plus tard, on doit faire $l_0 = \left(\frac{1-i^m\eta_1}{1+i^m\eta_1}\right)^2$ ou même $l_0^2 = \left(\frac{1-i^m\eta_1}{1+i^m\eta_1}\right)^4$, l_0 désignant le module obtenu par la transformation principale; mais il est facile de voir que seulement une des valeurs de η qui correspondent à une même valeur de l_0 ou de l_0^2 peut être égale à ξ, puisque autrement on aurait $l_0 = 0$, supposition impossible; donc aussi dans ce cas chaque valeur de $x+yi\sqrt{n_1}$ répond à une seule racine de l'équation

$$F(\xi, \eta) = 0.$$

Réciproquement, si $x^2+y^2n_1 = n$, les équations (27) définissent une multiplication, généralement complexe, du degré n.

Ainsi chaque module singulier de la première espèce et du degré n_1 admet un nombre de multiplications égal au nombre des solutions de l'équation $x^2+y^2n_1 = n$; le nombre de transformations qu'il faut compter n'en est que la moitié, puisque chaque valeur du module transformé, de son carré ou de sa racine carrée, s'obtient avec deux multiplicateurs qui ne se distinguent que par les signes (*voir* le Tableau des transformations linéaires A).

En considérant en *second lieu* les modules de la seconde espèce, les

équations (26), (27) sont remplacées par les suivantes :

$$
(28)\quad \begin{cases}
a_1\zeta_1^2 + (2b_1+1)\zeta_1 + c_1 = 0, \qquad a_1c_1 - b_1(b_1+1) = n_1,\\[4pt]
\dfrac{x+yi\sqrt{4n_1-1}}{2}\,2\varpi = \left(\dfrac{x+y}{2} + yb_1\right)2\varpi + ya_1\varpi',\\[8pt]
\dfrac{x-yi\sqrt{4n_1-1}}{2}\,\varpi' = -yc_1\,.\,2\varpi + \left(\dfrac{x-y}{2} - yb_1\right)\varpi',\\[8pt]
x^2 + y^2(4n_1-1) = 4n,
\end{cases}
$$

x et y étant de la même parité. Au reste, les conclusions sont les mêmes.

Les transformations définies par les équations (27), (28) ne sont pas toutes de l'espèce que nous avons à considérer; il faut d'abord écarter celles où x et y ont un diviseur commun, s'il s'agit d'un module de la première espèce; pour les modules de la seconde espèce, il faut omettre celles où x et y ont un diviseur commun autre que 2; par là les cas des multiplications ordinaires sont exclus. Enfin il faut que la valeur $\xi = \xi_0$, déterminée par les équations (27) ou (28), satisfasse à l'équation spéciale $F(\xi, \xi) = 0$ dont il est question. Supposons d'abord qu'on ait fait $\sqrt{k} = \xi$. En désignant par $f(\xi, \eta) = 0$ l'équation modulaire principale, on a

$$F(\xi, \eta) = f(\xi, i^{r_1 s_1}\eta), \qquad \text{si } s_1 \equiv 0 \pmod 4,$$

$$F(\xi, \eta) = f\left(\xi, \frac{i^{r'_1 s'_1}}{\eta}\right), \qquad \text{si } s_1 \equiv 2 \pmod 4,$$

$$F(\xi, \eta) = f\left(\xi, i^{s_1 s_1}\frac{1 - i^{r_1 s_1}\eta}{1 + i^{r_1 s_1}\eta}\right), \quad \text{si } s_1 \text{ est impair.}$$

Soit de plus $\begin{pmatrix} R_1 & S_1 \\ R'_1 & S'_1 \end{pmatrix}$ la transformation linéaire qu'il faut combiner avec la transformation principale pour avoir la multiplication complexe (27) ou (28), et qui se détermine par un système d'équations analogue au système (24). Or il faut que la racine carrée du module l_0 déduite de $\sqrt{l}$, c'est-à-dire de ξ, par la transformation principale, se change en η par chacune des transformations linéaires $\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r'_1 & s'_1 \end{pmatrix}$ et

$\begin{pmatrix} R_1 & S_1 \\ R'_1 & S'_1 \end{pmatrix}$; donc on doit avoir

$$\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r'_1 & s'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & S_1 \\ R'_1 & S'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ r'_2 & s'_2 \end{pmatrix},$$

où $r_2 s'_2 - r'_2 s_2 = 1$, et où, au moins s'il ne s'agit pas d'un module linéaire, $r'_2 \equiv s_2 \equiv 0$ et, par suite, $r_2 s'_2 \equiv 1 \pmod 4$. Mais effectivement les modules linéaires ne font pas exception; en effet, si l_0 est linéaire, il admet une multiplication complexe linéaire

$$\varepsilon' . 2\varpi_0 = r_3 . 2\varpi_0 + s_3 \varpi'_0,$$
$$\varepsilon' . \varpi_0 = r'_3 . 2\varpi_0 + s'_3 \varpi'_0,$$

et, par conséquent, on peut remplacer la transformation $\begin{pmatrix} R_1 & S_1 \\ R_1 & S'_1 \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} R_1 & S_1 \\ R'_1 & S'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_3 & s_3 \\ r'_3 & s'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2 & S_2 \\ R'_2 & S'_2 \end{pmatrix}$, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r'_1 & s'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2 & S_2 \\ R'_2 & S'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s'_3 & -s_3 \\ -r'_3 & r_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ r'_2 & s'_2 \end{pmatrix}.$$

Or, si l'on n'a pas $r'_2 \equiv s_2 \equiv 0 \pmod 4$, les deux transformations linéaires $\begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ r'_2 & s'_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} r_3 & s_3 \\ r'_3 & s'_3 \end{pmatrix}$ donnent nécessairement un résultat identique, quand on les applique à un module quelconque, car autrement $\sqrt{l_0}$ serait déterminé par deux équations incompatibles; donc la transformation $\begin{pmatrix} s'_3 & -s_3 \\ -r'_3 & r_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ r'_2 & s'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_4 & s_4 \\ r'_4 & s'_4 \end{pmatrix}$ n'altère pas la racine carrée d'un module quelconque, c'est-à-dire qu'on a

$$r'_4 \equiv s_4 \equiv 0 \pmod 4.$$

Cela posé, ayant

$$r_1 = R_1 r_2 + S_1 r'_2, \qquad s_1 = R_1 s_2 + S_1 s'_2,$$
$$r'_1 = R'_1 r_2 + S'_1 r'_2, \qquad s'_1 = R'_1 s_2 + S'_1 s'_2,$$

on conclut

$$r_1 \equiv R_1 r_2, \qquad s_1 \equiv S_1 s'_2, \qquad r'_1 \equiv R'_1 r_2, \qquad s'_1 \equiv S'_1 s'_2 \pmod 4;$$

d'où

$$r_1 s_1 \equiv R_1 S_1, \qquad r'_1 s'_1 \equiv R'_1 S'_1, \qquad s_1 s'_1 \equiv S_1 S'_1 \pmod 4.$$

Donc si $s_1 \equiv 0$, on a

$$S_1 \equiv 0, \qquad r'_1 s_1 \equiv R'_1 S'_1 \pmod 4;$$

si $s_1 \equiv 2$,

$$S_1 \equiv 2, \qquad r'_1 s'_1 \equiv R'_1 S'_1;$$

et si $s_1 \equiv \pm 1$,

$$S_1 \equiv \pm 1, \qquad r_1 s_1 \equiv R_1 S_1, \qquad s_1 s'_1 \equiv S_1 S'_1.$$

En substituant les valeurs r_1, s_1, r'_1, s'_1; R_1, S_1, R'_1, S'_1, on a dans chacun des trois cas un système de congruences en x et y, qui expriment que la valeur $\xi = \xi_0$ satisfait à l'équation $F(\xi, \xi) = 0$.

Dans les cas où l'on a $\xi = k$ les congruences $r'_1 s'_1 \equiv R'_1 S'_1$, $r_1 s_1 \equiv R_1 S_1$ doivent évidemment être prises suivant le module 2; si $\xi = k^2$, elles doivent être omises.

Le nombre des transformations des formes (27) et (28) qui satisfont à ces conditions est égal à la multiplicité de la racine $\eta_1 = \xi_0$ de l'équation $F(\xi_0, \eta) = 0$, pourvu qu'on ne compte que pour une seule transformation deux multiplications complexes qui se déduisent l'une de l'autre en changeant simultanément les signes de x et y.

Ce nombre est en même temps la multiplicité de la racine ξ_0 de l'équation $F(\xi, \xi) = 0$. Pour le démontrer, il suffit de faire voir qu'en considérant l'équation $F(\xi, \eta) = 0$ comme l'expression analytique d'une courbe, aucune des droites $\eta = \xi$, $\xi = \xi_0$ ne coïncide avec une tangente de la courbe au point $\xi = \eta = \xi_0$. Dans le cas où l'on a fait $\xi = k$, on a, d'après une formule de Jacobi,

$$\frac{d\eta_1}{d\xi} = \frac{\eta_1(1-\eta_1^2)}{\xi(1-\xi^2)}\,\frac{\varepsilon^2}{n},$$

ce qui pour $\xi = \eta$ donne

$$\frac{d\eta_1}{d\xi} = \frac{\varepsilon^2}{n},$$

détermination qui est encore valable pour $\xi = k^2$ et pour $\xi = \sqrt{k}$.

comme on le voit aisément; or, ε étant imaginaire, $\frac{\varepsilon^2}{n}$ ne peut être égal à l'unité, ni à l'infini.

On peut se servir de plusieurs méthodes pour débarrasser l'équation $F(\xi, \xi) = 0$ des racines étrangères à la question. Dans beaucoup de cas les modules du degré n seuls sont des racines simples, ce qui fournit un moyen de les isoler. On peut, dans tous les cas, calculer préalablement les équations dont dépendent les racines étrangères, et les supprimer par une série de divisions. Enfin, si l'on connaît l'équation du multiplicateur ε, on peut en éliminer ε au moyen de l'équation $\varepsilon^2 + n = 0$ ou $\varepsilon^2 \pm \varepsilon + n = 0$, suivant qu'il s'agit de modules de la première ou de la seconde espèce; en cherchant le plus grand commun diviseur des premiers membres de l'équation résultante et de l'équation $F(\xi, \xi) = 0$, on obtient un polynôme qui, égalé à zéro, donne évidemment l'équation des modules du degré n.

Pour n'avoir pas un trop grand nombre de cas à distinguer, nous nous occuperons principalement des équations en k^2, quoiqu'il soit souvent préférable dans les calculs de passer par des équations en $\sqrt{k}$, ou même en $\sqrt[4]{k}$.

9. Supposons que n soit impair. Nous choisissons pour transformations principales celles qui sont définies par les équations

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 . 2\omega &= \delta . 2\omega_0, \\ \varepsilon_0 . \omega' &= -t . 2\omega_0 + n'\omega'_0, \qquad \frac{\omega'_0}{2\omega_0} = \zeta_0 = \frac{t + \delta\zeta}{n'}, \end{aligned}$$

qui donnent les formules bien connues

$$Y = \lambda(\varepsilon_0 \theta, k_0) = \varepsilon_0 \lambda(\theta) \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 - \dfrac{\lambda^2 \theta}{\lambda^2\left(\dfrac{p\Omega}{n}\right)}}{1 - k^2 \lambda^2(\theta) \lambda^2\left(\dfrac{p\Omega}{n}\right)},$$

$$\varepsilon_0 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\lambda^2\left(\dfrac{p\Omega}{n}\right) \nu^2\left(\dfrac{p\Omega}{n}\right)}{\mu^2\left(\dfrac{p\Omega}{n}\right)}, \qquad \sqrt{k_0} = (\sqrt{k})^n \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mu^2\left(\dfrac{p\Omega}{n}\right)}{\nu^2\left(\dfrac{p\Omega}{n}\right)}.$$

Le nombre t n'est déterminé que par rapport au module n' : nous

pouvons donc le supposer divisible par 4; de plus, δ étant impair et de signe arbitraire, nous supposerons

$$\delta \equiv 1 \pmod 4, \qquad \text{d'où} \qquad n' \equiv n \pmod 4;$$

par là les équations (24) donnent

$$(29) \quad r_1 \equiv r, \qquad s_1 \equiv s, \qquad r'_1 \equiv (-1)^{\frac{n-1}{2}} r', \qquad s'_1 \equiv (-1)^{\frac{n-1}{2}} s'.$$

Nous supposerons l'équation modulaire écrite entre $\sqrt{k_0}$ et $\sqrt{k}$: nous la désignerons par

$$(30) \qquad f(\sqrt{k}, \sqrt{k_0}) = 0;$$

si on la combine avec une des transformations linéaires du Tableau, on a une équation entre $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k_1}$ dont les racines correspondent une à une aux racines de l'équation (30). On sait que dans l'équation (30) les coefficients des diverses puissances de $\sqrt{k_0}$ sont des fonctions entières de $\sqrt{k}$ à coefficients entiers, le premier terme étant $(\sqrt{k_0})^N$, le dernier $(\sqrt{k})^N$. De plus, si n n'est pas un carré parfait, les termes du plus haut et du plus petit degré en $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k_0}$ ont pour coefficients une même puissance de 2. Cela a été démontré par Sohnke pour les transformations de degré premier (*Journal de Crelle*, t. 16), et il n'est pas difficile de le démontrer en général. En effet, pour les petites valeurs de k, on peut développer $\sqrt{k_0}$ en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $(\sqrt{k})^{\frac{1}{n'}}$, dont le premier terme est

$$e^{2\pi i \frac{t}{4n'}} 2^{\frac{n'-\delta}{n'}} (\sqrt{k})^{\frac{\delta}{n'}}$$

(*voir* la *Théorie des fonctions elliptiques* de MM. Briot et Bouquet, p. 631, où cette propriété est démontrée pour les degrés premiers). On a donc, pour les petites valeurs de k,

$$f(\sqrt{k}, \sqrt{k_0}) = \Pi\left(\sqrt{k_0} - e^{2\pi i \frac{t}{4n'}} 2^{\frac{n'-\delta}{n'}} \sqrt{k}^{\frac{\delta}{n'}} - \ldots\right);$$

or on a le terme du plus petit degré, en prenant de chaque facteur le terme dont le degré est le plus petit, c'est-à-dire, le premier terme si $\delta > n'$, le second si $\delta < n'$; donc, le coefficient du terme cherché de la fonction $f(\sqrt{k}, \sqrt{k_0})$, étant un nombre entier, est bien une puissance de 2. De plus, ayant

$$f(\sqrt{k}, \sqrt{k_0}) = (\sqrt{k})^{\mathrm{N}} (\sqrt{k_0})^{\mathrm{N}} f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k_0}}\right),$$

le coefficient du terme du plus haut degré est égal à celui du terme du plus petit degré.

Par la remarque faite à la fin du n° 6, il est facile de voir qu'en supposant $\sqrt{k}$ égal à l'une des valeurs

$$0, \quad \infty, \quad 1, \quad -1, \quad i, \quad -i,$$

$\sqrt{k_0}$ sera respectivement égal à

$$0, \quad \infty, \quad 1, \quad -1, \quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} i, \quad -(-1)^{\frac{n-1}{2}} i,$$

c'est-à-dire qu'on aura, pour les valeurs critiques de $\sqrt{k}$,

$$\sqrt{k_0} = (\sqrt{k})^n.$$

Soit, pour un moment, $\sqrt{k} = x$, $\sqrt{k_0} = y$, et faisons subir à x la transformation linéaire $\begin{pmatrix} r & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, et soit ξ la racine carrée du module transformé; on aura

$$\xi = i^{-r} \frac{1-x}{1+x}, \qquad x = \frac{i^{-r} - \xi}{i^{-r} + \xi};$$

soit de plus η la valeur de $\sqrt{k_0}$ correspondant à ξ, de sorte qu'on ait

$$f(\xi, \eta) = 0.$$

Évidemment η se déduit de x par une transformation du degré n, c'est-à-dire qu'on l'obtient par une transformation principale du

degré n suivie d'une transformation linéaire; donc on a

$$\eta = i^m y \qquad \text{ou} \qquad \eta = \frac{i^m}{y}$$

ou enfin

$$\eta = i^m \frac{1 - i^\mu y}{1 + i^\mu y};$$

or, par la remarque précédente, il est facile de voir qu'on a effectivement

$$\eta = i^{-nr} \frac{1 - y}{1 + y}, \qquad y = \frac{i^{-nr} - \eta}{i^{-nr} + \eta}.$$

En reportant les valeurs de x et de y dans l'équation $f(x, y) = 0$, on voit que l'équation $f(\xi, \eta) = 0$ entraîne celle-ci :

$$f\left(\frac{i^{-r} - \xi}{i^{-r} + \xi}, \frac{i^{-nr} - \eta}{i^{-nr} + \eta}\right) = 0.$$

Voici encore une remarque qui nous sera utile. On a

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mu^2\left(\frac{p\Omega}{n}\right)}{\nu^2\left(\frac{p\Omega}{n}\right)} = \frac{\sqrt{k_0}}{\sqrt{k}} \frac{1}{k^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{\sqrt{k_0}\sqrt{k}}{k^{\frac{n+1}{2}}},$$

et l'on sait que le premier membre est racine d'une équation du degré N dont les coefficients sont rationnels en k^2; par suite, en substituant à l'inconnue de cette équation, soit $\frac{\sqrt{k_0}}{\sqrt{k}} \frac{1}{k^{\frac{n-1}{2}}}$, soit $\frac{\sqrt{k_0}\sqrt{k}}{k^{\frac{n+1}{2}}}$, on obtient l'équation modulaire. Donc celle-ci peut être mise sous la forme

$$(31) \qquad \Phi\left(\frac{\sqrt{k_0}}{\sqrt{k}}, k^2\right) = 0, \qquad \text{si } n \equiv 1 \pmod 4,$$

et sous la forme

$$(32) \qquad \Phi(\sqrt{k_0}\sqrt{k}, k^2) = 0, \qquad \text{si } n \equiv -1 \pmod 4.$$

10. *Considérons les modules de la première espèce et de la première catégorie d'un degré de la forme* $4h+1$. — Le coefficient a est nécessairement congru à $2 \pmod 4$, b et c sont impairs; les équations (29) deviennent

$$r_1 \equiv b, \qquad s_1 \equiv a \equiv 2, \qquad r'_1 \equiv -c, \qquad s'_1 \equiv -b \pmod 4.$$

Il faut donc employer le cas B du tableau des transformations linéaires, c'est-à-dire qu'il faut faire

$$\sqrt{k} = \frac{i^{-bc}}{\sqrt{k_0}}, \qquad \varepsilon' = (-1)^{\frac{b-1}{2}+c} k_0, \qquad \lambda(\varepsilon'\varepsilon_0\theta) = \varepsilon'\lambda(\varepsilon_0\theta) = \varepsilon' Y;$$

d'où l'on tire

$$\sqrt{k_0} = \frac{i^{-bc}}{\sqrt{k}}, \qquad \varepsilon_0 = i^b k\sqrt{n}, \qquad \lambda(i\sqrt{n}\,\theta) = \frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}}}{k} Y.$$

En substituant l'expression de $\sqrt{k_0}$ dans l'équation modulaire principale, on obtient donc deux équations en $\sqrt{k}$, dont les coefficients, qui sont de la forme $p+qi$, ne se distinguent que par le signe de i; le premier et le dernier coefficient sont ± 1. L'équation (31) fait voir que les équations trouvées peuvent être mises sous la forme

$$\Phi\left(\frac{1}{i^{bc}k}, k^2\right) = 0$$

ou bien

$$f(i^{bc}k) = 0,$$

f dénotant une fonction entière à coefficients entiers.

Cette équation n'est satisfaite ni par $k=0$, ni par $k=\pm 1$.

Soit l un module singulier de la première espèce et du degré n_1, satisfaisant à l'équation $f(i^{bc}k) = 0$, on aura, d'après (27) et (29),

$$x^2 + y^2 n_1 = n, \qquad R_1 \equiv x + yb_1, \qquad S_1 \equiv ya_1$$
$$R'_1 \equiv -yc_1, \qquad S'_1 \equiv x - yb_1 \pmod 4.$$

Or on doit avoir (n° 8)

$$S_1 \equiv s_1 \equiv 2, \qquad R'_1 S'_1 \equiv r'_1 s'_1 \equiv bc \pmod 4;$$

donc les conditions à remplir pour que l satisfasse à l'équation sont les suivantes :

$$(33)\qquad \left\{\begin{array}{ll} x^2+y^2n_1=n, & ya_1\equiv 2 \\ \quad -xyc_1+y^2b_1c_1\equiv bc & \end{array}\right\} \pmod 4.$$

On en conclut que y et c_1 sont impairs, et que $a_1\equiv 2 \pmod 4$; b_1 est nécessairement impair; car, dans le cas contraire, on aurait,

$$n_1=a_1c_1-b_1^2\equiv 2 \qquad \pmod 4;$$

d'où

$$x^2+y^2n_1\equiv 3 \quad \text{ou} \quad \equiv 2,$$

contre l'hypothèse. Donc n_1 est de la forme $4h+1$, x pair. Si $x>0$, on peut changer son signe sans troubler les congruences $(\bmod 4)$; donc, dans ces cas, l est une racine double ou multiple; l est en effet racine multiple s'il existe plus de quatre solutions de l'équation indéterminée $x^2+y^2n_1=n$ en nombres premiers entre eux.

Aucun module de la seconde espèce ne satisfait à nos équations. En effet, d'après (28), on aurait

$$\mathrm{R}_1\equiv\frac{x+y}{2}+yb_1\equiv\pm 1, \qquad \mathrm{S}_1\equiv ya_1\equiv 2 \qquad \pmod 4,$$

$$\mathrm{R}'_1\equiv -yc_1\equiv\pm 1, \qquad \mathrm{S}'_1\equiv\frac{x-y}{2}-yb_1\equiv\pm 1:$$

donc y serait impair; or on trouve $\mathrm{R}_1-\mathrm{S}'_1\equiv y(2b_1+1)$, ce qui est impossible, $\mathrm{R}_1-\mathrm{S}'_1$ devant être pair.

Par ce qui précède il est démontré que les racines de l'équation $f(i^{bc}k)=0$ sont les modules de la première espèce et de la première catégorie dont les degrés, nécessairement de la forme $4h+1$, vérifient l'équation $n=x^2+y^2n_1$, x et y étant premiers entre eux, x pair, et pour lesquels le nombre b_1c_1 satisfait à la congruence

$$b_1c_1\equiv bc+x \qquad \pmod 4,$$

issue de (33). Parmi ces racines les modules du degré n seuls sont des

racines simples. Si l'on a calculé préalablement les équations des modules de première espèce et de première catégorie des degrés $4h+1$ inférieurs à n, on peut obtenir l'équation relative au degré n par de simples divisions; dans ce cas, on remarquera qu'il faudra alterner le signe de i dans les équations des degrés inférieurs. On trouve donc finalement deux équations en k,

$$F(ik)=0, \qquad F(-ik)=0,$$

équivalentes à une seule équation en k^2

$$F_1(k^2)=0,$$

qui est réciproque, et dont les coefficients sont des nombres entiers, le premier et le dernier étant 1. Les degrés de ces équations sont égaux au double du nombre des classes primitives du déterminant $-n$, comme on le sait *a priori*. Les deux équations

$$F(i^{bc}k)=0 \qquad \text{et} \qquad F(i^{-bc}k)=0$$

n'ayant pas de racine commune, on peut conclure qu'on aura

$$i^{bc}k=\psi(k^2),$$

ψ dénotant une fonction rationnelle à coefficients entiers, qui est identiquement la même pour toutes les racines de l'équation $F_1(k^2)=0$.

Si, par exemple, on fait $n=5$, et qu'on pose $k=u^4$, $k_0=v^4$, l'équation modulaire principale peut s'écrire comme il suit :

$$(u^6+5u^4v^2-5u^2v^4-v^6)^2=16u^2v^2(1-u^4v^4)^2.$$

En y faisant $u^2=\sqrt{k}$, $v^2=\dfrac{-i}{\sqrt{k}}$, on trouve

$$k^6-10ik^5-15k^4+12ik^3+15k^2-10ik-1=0$$

ou bien

$$(k-i)^2(k^4-8ik^3+2k^2+8ik+1)=0.$$

Égalant à zéro le second facteur, on a l'équation $F(ik) = 0$; en la résolvant, on trouve

$$k = i\left(2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}\right)$$

ou

$$k^2 = -\left[\tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) + \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)}\right]^4.$$

C'est le module trouvé par *Abel* dans les *Recherches sur les fonctions elliptiques.*

De l'analyse précédente on tire facilement une formule d'Arithmétique. En effet, l'équation que nous avons décomposée est du degré N. D'autre part, on obtient ce degré, en prenant pour chaque valeur paire de x, figurant dans l'équation $n = x^2 + y^2 n_1$, le nombre des classes de formes quadratiques du déterminant $-(n - x^2)$, dans lesquelles le plus grand commun diviseur des trois coefficients a, b, c sont premiers à n, multipliant ce nombre par 2 si $x = 0$, et si $n_1 = 1$ (puisqu'il n'y a qu'une seule valeur de k^2 de la première espèce et de la première catégorie du degré 1), par 4 dans les autres cas, et faisant la somme des produits formés. On peut conserver le facteur 4 dans le cas où $n_1 = 1$, si l'on ajoute à N la correction nécessaire. Pour écrire la formule, désignons, pour un moment, par $F_1(m)$ le nombre des classes du déterminant $-m$ où les trois coefficients n'ont pas un même diviseur commun avec n, et désignons par $2\varphi_1(n)$ le nombre des solutions de l'équation $n = 4x^2 + y^2$ en nombres premiers entre eux; la correction à ajouter sera $\varphi_1(n)$, et, par suite, on aura, en supposant $n = 4h + 1$,

$$2F_1(n) + 4F_1(n - 2^2) + 4F_1(n - 4^2) + \ldots = N + \varphi_1(n).$$

Au fond cette équation ne diffère pas de celle qu'on obtient en ajoutant les formules V et VI de M. Kronecker (*Journal de Crelle*, t. 57, p. 249), et faisant $m \equiv 1 \pmod 4$. On trouve des corollaires analogues dans tous les cas que nous avons à considérer dans la suite; dans un Mémoire inséré aux *Comptes rendus*, t. L, le P. Joubert en a développé plusieurs. Nous les passerons ordinairement sous silence, pour y revenir dans un paragraphe spécial.

11. *Modules de la première espèce et de la première catégorie d'un degré de la forme* $4h-1$. — On a $a \equiv 0 \pmod 4$, b et c sont impairs; par suite les congruences (29) deviennent

$$r_1 \equiv b \equiv \pm 1, \qquad s_1 \equiv 0, \qquad r'_1 \equiv c \equiv \pm 1,$$
$$s'_1 \equiv b \equiv \pm 1, \qquad (\text{mod. } 4),$$

et, par conséquent, on a

$$\sqrt{k} = i^{-bc}\sqrt{k_0}, \qquad \varepsilon' = (-1)^{\frac{b-1}{2}},$$

d'où

$$\sqrt{k}\sqrt{k_0} = i^{bc}k, \qquad \varepsilon_0 = i^b\sqrt{n}, \qquad \lambda(i\sqrt{n}\,0) = (-1)^{\frac{b-1}{2}}\,\mathrm{Y}.$$

En substituant dans l'équation modulaire, on obtient une équation en k, qui, en vertu de l'équation (32), prend la forme

$$f(i^{bc}k) = 0.$$

Les coefficients des diverses puissances de $i^{bc}k$ sont des nombres entiers, le premier et le dernier étant égaux à une même puissance de 2. L'équation admet la racine, en général multiple, $k=0$, mais elle n'est pas satisfaite par $k=\pm 1$. Quant aux autres racines, on a des résultats complètement analogues à ceux du numéro précédent. Finalement on trouve les équations

$$\mathrm{F}(i^{bc}k) = 0, \qquad \mathrm{F}_1(k^2) = 0,$$

qui ne sont satisfaites que par les modules du degré n; la seule différence est que le premier et le dernier coefficient sont une même puissance de 2. Cependant, si n est de la forme $8h'+3$, cette puissance de 2 disparaît comme diviseur commun à tous les coefficients, de sorte que dans ce cas le premier et le dernier coefficient de $\mathrm{F}_1(k^2)$ deviennent 1. C'est ce que nous démontrerons plus tard.

Exemples. — Pour $n=3$ l'équation modulaire

$$u^4 - v^4 + 2uv(1 - u^2v^2) = 0$$

donne, en chassant les puissances impaires de uv et faisant $u^2 = \sqrt{k}$, $v^2 = \sqrt{k_0}$

$$k^2 - 4\sqrt{k^3}\sqrt{k_0^3} + 6kk_0 - 4\sqrt{k}\sqrt{k_0} + k_0^2 = 0;$$

en y faisant $\sqrt{k_0} = i\sqrt{k}$, on a

$$4k(k^2 + ik - 1) = 0;$$

le dernier facteur donne pour les modules du degré 3 les deux valeurs

$$k^2 = \tfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) = e^{\pm\frac{\pi i}{3}}.$$

Pour $n = 7$, l'équation modulaire est

$$(u^8 - 1)(v^8 - 1) - (uv - 1)^8 = 0.$$

En y faisant $v = u\sqrt{i}$, $u^2 = \sqrt{k}$, on a

$$\left[k^2 - 1 - (\sqrt{i}\sqrt{k} - 1)^4\right]\left[k^2 - 1 + (\sqrt{i}\sqrt{k} - 1)^4\right] = 0$$

ou bien, en chassant les radicaux,

$$4k(k^2 - ik - 1)^2(4k^2 + ik - 4) = 0.$$

Le dernier facteur donne, pour les modules du degré 7, l'expression

$$k^2 = \left[\tfrac{1}{8}(i \pm 3\sqrt{7})\right]^2.$$

12. *Modules de la seconde espèce du déterminant* $-n$. — De l'équation modulaire répondant à la transformation principale du degré $n = 4h - 1$, on peut tirer tous les modules de la seconde espèce du déterminant $-n$, c'est-à-dire du degré $\frac{n+1}{4}$. En faisant $x = 0$, $y = 2$ et, remplaçant $4n - 1$ par n, les équations (10) donnent

$$i\sqrt{n}\,.\,2\omega = (2b + 1)2\omega + 2a\omega',$$

$$i\sqrt{n}\,.\;\;\omega' = -2\,.\,c\,2\omega - (2b + 1)\omega',$$

$$n = 4ac - (2b + 1)^2.$$

On fera donc

$$r_1 \equiv s'_1 \equiv 2b+1, \qquad s_1 \equiv 2a, \qquad r'_1 \equiv 2c \qquad (\text{mod} 4).$$

La première catégorie n'existe que si n est de la forme $8h-1$; de plus a est pair, et par conséquent s_1 est divisible par 4; on a donc

$$\sqrt{k} = (-1)^c \sqrt{k_0}, \qquad \varepsilon' = (-1)^b,$$

d'où

$$\sqrt{k_0} = (-1)^c \sqrt{k}, \qquad \varepsilon_0 = i^{2b+1}\sqrt{n}, \qquad \lambda(i\sqrt{n}\,0) = (-1)^b \mathrm{Y}.$$

En substituant dans l'équation modulaire, on obtient une équation de la forme

$$f[(-1)^c k] = 0$$

(32), dont les coefficients sont des entiers, le premier et le dernier étant égaux à une même puissance de 2. Elle admet évidemment les racines $k=0$ et $k=(-1)^c$; mais elle n'est satisfaite par aucun module de la première espèce; en effet, les équations (27) et (29) donneraient

$$\mathrm{S}_1 \equiv y a_1 \equiv 0, \qquad \mathrm{R}'_1 \equiv y c_1, \qquad \mathrm{R}'_1 \mathrm{S}'_1 \equiv 2c \qquad (\text{mod} 4).$$

Or, S_1 étant pair, S'_1 serait impair, et par suite $\mathrm{R}'_1 = y c_1$ serait pair; donc, a_1 et c_1 n'étant pas tous les deux pairs, y serait pair, ce qui rendrait impossible la relation $x^2 + y^2 n_1 = n$. Pour les modules de la seconde espèce, satisfaisant à l'équation trouvée, on doit avoir [équations (28), (29)]

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{R}_1 \equiv \frac{x+y}{2} + y b_1, && \mathrm{S}_1 \equiv y a_1, \\ &\mathrm{R}'_1 \equiv y c_1, && \mathrm{S}'_1 \equiv -\frac{x-y}{2} + y b_1 \end{aligned}\right\} (\text{mod} 4),$$

et (n° **8**)

$$\mathrm{S}_1 \equiv 0, \qquad \mathrm{R}'_1 \mathrm{S}'_1 \equiv 2c.$$

S étant pair, R_1 et S'_1 seront impairs; or, ayant

$$\mathrm{R}_1 + \mathrm{S}'_1 \equiv y(2b_1+1),$$

y et par suite x seront pairs. En remplaçant $4n_1 - 1$ par n_1, et faisant par suite $n_1 = 4a_1c_1 - (2b_1+1)^2$, on a

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 n_1 = n,$$

d'où l'on conclut que $\frac{x}{2}$ est pair, $\frac{y}{2}$ impair; par suite a_1 sera pair, n_1 de la forme $8h - 1$: donc enfin $\frac{x}{2}$ est divisible par 4. L'équation

$$f[(-1)^c k] = 0$$

admet donc comme racines, outre o et $(-1)^c$, les modules de la seconde espèce et de la première catégorie dont les déterminants $-n_1$ satisfont à la relation $n = 16\xi^2 + \eta^2 n_1$, ξ et η étant premiers entre eux, pourvu toutefois qu'on détermine le signe de chaque module conformément à la congruence $c_1 \equiv c \pmod 2$. Si $\xi > 0$, son signe est arbitraire : donc les modules du déterminant $-n$ seuls sont des racines simples. En les isolant, on obtient une équation en k, $F[(-1)^c k] = 0$, à coefficients entiers, le premier et le dernier étant une même puissance de 2. On a donc une seule équation en k^2. D'ailleurs ces équations sont réductibles, comme on le verra plus bas.

Pour $n = 7$, l'équation modulaire est

$$(u^8 - 1)(v^8 - 1) - (uv - 1)^8 = 0;$$

au lieu de faire $u^2 = v^2$ après avoir chassé les puissances impaires de uv, faisons simplement $u = v$, ce qui d'ailleurs modifie la multiplicité de la racine $u^2 = 0$; on trouve

$$[u^8 - 1 + (u^2-1)^4][u^8 - 1 - (u^2-1)^4] = 0$$

ou bien

$$u^2(u^2-1)^2(u^4 - u^2 + 2)(2u^4 - u^2 + 1) = 0.$$

Par conséquent les carrés des modules de la seconde espèce et de la première catégorie du déterminant -7 sont compris dans les expressions

$$k^2 = \left[\tfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7})\right]^4, \qquad k^2 = \left[\tfrac{1}{4}(1 \pm i\sqrt{7}\right]^4.$$

On a les mêmes valeurs de k^2 en faisant $u = - v$.

Dans la seconde catégorie a est impair; c est pair ou impair suivant que n est de la forme $8h - 1$ ou $8h + 3$: donc on a

$$s_1 = 2, \qquad r'_1 = \frac{n+1}{2} \qquad (\text{mod } 4),$$

$$\sqrt{k} = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{4}}}{\sqrt{k_0}}, \qquad \varepsilon' = (-1)^b k_0,$$

ce qui donne

$$\sqrt{k_0}\sqrt{k} = (-1)^{\frac{n+1}{4}}, \qquad \varepsilon_0 = i^{2b+1} k \sqrt{n}, \qquad \lambda(i\sqrt{n}\,\theta) = (-1)^b \frac{1}{k} Y.$$

En substituant la valeur de $\sqrt{k_0}$ dans l'équation modulaire, on obtient une équation en k^2 [équation (32)]

$$f(k^2) = 0,$$

qui est satisfaite par $k^2 = 1$ seulement si $n = 8h - 1$, mais qui n'est jamais satisfaite par $k^2 = 0$. Au reste, elle admet pour racines les carrés des modules de la seconde espèce et de la seconde catégorie dont les déterminants $- n_1$ vérifient la relation

$$n = 16\xi^2 + \eta^2 n_1,$$

ξ et η étant premiers entre eux, les modules du déterminant $- n$ seuls étant des racines simples. En débarrassant l'équation $f(k^2) = 0$ de la racine $k^2 = 1$ et des racines doubles ou multiples, on trouve finalement une équation en k^2, réciproque, à coefficients entiers, dont évidemment le premier et le dernier sont 1.

Exemples : $n = 3$. — Faisant, dans l'équation modulaire

$$u^4 - v^4 + 2uv(1 - u^2v^2) = 0,$$

$uv = \pm i$, on a

$$u^8 \mp 4iu^4 - 1 = 0,$$

ou bien

$$k^2 \mp 4ik - 1 = 0; \qquad \text{d'où} \qquad k^2 = -(2 \pm \sqrt{3})^2.$$

$n = 7$. — En faisant, dans l'équation

$$(u^8 - 1)(v^8 - 1) - (uv - 1)^8 = 0,$$

$uv = 1$, on a seulement la racine double $k^2 = 1$; mais, en faisant $uv = -1$, on trouve

$$(u^8 - 1)^2 + 2^8 u^8 = 0; \qquad \text{d'où} \qquad u^8 \pm 16 i u^4 - 1 = 0:$$

donc

$$k^2 = -\tfrac{1}{4}(3 \pm \sqrt{7})^4.$$

$n = 11$. — On trouve, en faisant, dans l'équation modulaire $uv = \pm i$, $u^2 = \sqrt{k}$,

$$k^6 \pm 44 i k^5 + 77 k^4 \mp 152 i k^3 - 77 k^2 \pm 44 i k - 1 = 0;$$

d'où, en chassant les puissances impaires de k,

$$k^{12} + 2090 k^{10} - 7601 k^8 + 15116 k^6 - 7601 k^4 + 2090 k^2 + 1 = 0.$$

13. *Modules de la première espèce et de la seconde catégorie, d'un degré impair.* — Puisque, dans les congruences,

$$\left.\begin{array}{ll} r_1 \equiv b, & s_1 \equiv a \equiv \pm 1, \\ r'_1 \equiv (-1)^{\frac{n+1}{2}} c, & s'_1 \equiv (-1)^{\frac{n+1}{2}} b \end{array}\right\} \pmod 4,$$

a et, par suite, s_1 sont impairs, on a

$$\sqrt{k} = i^{-ab} \frac{1 - i^{nab}\sqrt{k_0}}{1 + i^{nab}\sqrt{k_0}}, \qquad \varepsilon' = \frac{i^a}{2}(1 + i^{nab}\sqrt{k_0})^2;$$

d'où l'on tire, en faisant, pour abréger, $\Delta Y = \mu(\varepsilon_0 \theta, k_0)\nu(\varepsilon_0 \theta, k_0)$,

$$\sqrt{k_0} = i^{-nab} \frac{1 - i^{ab}\sqrt{k}}{1 + i^{ab}\sqrt{k}}, \qquad \varepsilon' = \frac{2 i^a}{(1 + i^{ab}\sqrt{k})^2},$$

$$\varepsilon_0 = (-1)^{\frac{a-1}{2}} \frac{1}{2}\sqrt{n}(1 + i^{ab}\sqrt{k})^2, \qquad \lambda(i\sqrt{n}\,\theta) = \frac{2\varepsilon' Y}{1 + \Delta Y - i^{2nab} k_0 Y^2}.$$

En substituant l'expression de $\sqrt{k_0}$ dans l'équation modulaire, on obtient quatre équations répondant aux quatre valeurs de $ab \pmod 4$; mais il est facile de voir, au moyen des formules (31), (32), que ces équations ne donnent qu'une seule équation en k^2.

En effet, si $n \equiv 1 \pmod 4$, l'équation deviendra

$$\Phi\left(\frac{1 - i^{ab}\sqrt{k}}{i^{ab}\sqrt{k} + i^{2ab}k}, k^2\right) = 0,$$

et, si $n \equiv -1 \pmod 4$,

$$\Phi\left(\frac{i^{ab}\sqrt{k} - i^{2ab}k}{1 + i^{ab}\sqrt{k}}, k^2\right) = 0.$$

Donc, en désignant par

$$f(\sqrt{k}) = 0$$

l'équation qui répond à $b \equiv 0 \pmod 4$, on aura généralement

$$f(i^{ab}\sqrt{k}) = 0.$$

L'équation $f(\sqrt{k}) = 0$ n'est pas satisfaite par $k = 0$, $\sqrt{k} = \pm 1$; elle est satisfaite par $\sqrt{k} = \pm i$ seulement si $n \equiv -1 \pmod 4$. On voit aussi facilement qu'elle n'est satisfaite par aucun module de la seconde espèce. Pour les modules de la première espèce, on doit avoir

$$S_1 \equiv y a_1 \equiv \pm 1 \pmod 4;$$

donc y et a_1 sont impairs; de plus, il faut que

$$R_1 S_1 \equiv S_1 S'_1 \equiv 0;$$

d'où

$$x + y b_1 \equiv x - y b_1 \equiv 0 \pmod 4.$$

On en conclut que $2x \equiv 0 \pmod 4$, et que par suite x est pair et $b_1 \equiv x \pmod 4$. Par conséquent les racines de l'équation $f(z) = 0$ sont $\pm i$ (seulement si $n = 4h - 1$) et les racines carrées des modules de

la première espèce et de la seconde catégorie dont le degré n_1 vérifie la relation $n = x^2 + y^2 n_1$, x et y étant premiers entre eux, le premier pair et le dernier impair, et dont le coefficient b_1 est congru à $x \pmod 4$.) Évidemment les modules du degré n sont seuls des racines simples. En débarrassant l'équation des autres racines, on a finalement une équation $F(\sqrt{k}) = 0$, répondant au cas où $b \equiv 0 \pmod 4$; généralement on a

$$F(i^{ab}\sqrt{k}) = 0.$$

En chassant $\sqrt{k}$ et les puissances impaires de k, on a une seule équation en k^2, $F_1(k^2) = 0$. Remarquons encore que, puisque deux quelconques des quatre équations $F(\pm\sqrt{k}) = 0$, $F(\pm i\sqrt{k}) = 0$ n'ont pas de racines communes, $i^{ab}\sqrt{k}$ peut être exprimé en fonction rationnelle de k^2 :

$$i^{ab}\sqrt{k} = \psi(k^2),$$

la fonction ψ étant la même pour toutes les racines de l'équation

$$F_1(k^2) = 0.$$

Exemples. — Pour $n = 3$, on obtient, en écrivant z au lieu de $\sqrt{k}$, l'équation suivante

$$(z^2 + 1)^2(z^4 + 8z^3 + 2z^2 - 8z + 1) = 0;$$

le dernier facteur, qui répond aux modules du troisième degré, donne

$$z = \sqrt{k} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1).$$

Pour $n = 5$, on trouve

$$(z^2 \quad 2z \quad 1)^2$$
$$(z^8 + 16z^7 - 12z^6 + 16z^5 + 38z^4 - 16z^3 - 12z^2 - 16z + 1) = 0,$$

où le premier facteur donne les modules linéaires de la seconde catégorie, le second ceux du cinquième degré. Pour trouver ces derniers,

on peut faire $z - \frac{1}{z} = p$; on a ainsi

$$p^4 + 16p^3 - 8p^2 + 64p + 16 = (p^2 + 8p + 4)^2 - 80p^2 = 0;$$

d'où

$$p = -4 - 2\sqrt{5} - 4\sqrt{2 + \sqrt{5}},$$

$$-z = 2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}} + \sqrt{2 + \sqrt{5}}\sqrt{4 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[4 + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + \sqrt{10} + (4 + \sqrt{2} + \sqrt{10})\sqrt{2 + \sqrt{5}}\right].$$

14. *Modules de la seconde espèce d'un degré impair.* — Le degré n étant donné par la relation $n = ac - b(b+1)$, a et c sont impairs. On peut employer à volonté le premier ou le second des deux systèmes (9); si l'on choisit le premier, on a

$$\left.\begin{array}{ll} r_1 \equiv b + 1, & s_1 \equiv a \equiv \pm 1, \\ r'_1 \equiv (-1)^{\frac{n+1}{2}} c, & s'_1 \equiv (-1)^{\frac{n+1}{2}} b \end{array}\right\} \pmod 4;$$

donc on doit faire

$$\sqrt{k_0} = i^{-nab}\,\frac{1 - i^{a(b+1)}\sqrt{k}}{1 + i^{a(b+1)}\sqrt{k}},$$

$$\varepsilon' = \frac{2\,i^a}{\left[1 + i^{a(b+1)}\sqrt{k}\right]^2},$$

$$\varepsilon_0 = (-1)^{\frac{a-1}{2}}\,\tfrac{1}{4}\left(-i + \sqrt{4n - 1}\right)\left[1 + i^{a(b+1)}\sqrt{k}\right]^2,$$

$$\lambda\left(\frac{1 + i\sqrt{4n - 1}}{2}\,\theta\right) = \frac{2\varepsilon' Y}{1 + \Delta(Y) - i^{2nab} k_0 Y^2}.$$

On en tire, pour $n \equiv 1 \pmod 4$,

$$\frac{\sqrt{k_0}}{\sqrt{k}} = i^a\,\frac{1 - i^{a(b+1)}\sqrt{k}}{i^{a(b+1)}\sqrt{k} + i^{2a(b+1)} k}$$

et, pour $n \equiv -1$,

$$\sqrt{k_0}\sqrt{k} = i^{-a}\,\frac{i^{a(b+1)}\sqrt{k} - i^{2a(b+1)} k}{1 + i^{a(b+1)}\sqrt{k}}.$$

Donc, en vertu des formules (31) et (32), on a une équation de la forme

$$(34) \qquad f\left[i^{a(b+1)}\sqrt{k},\, i^a\right] = 0,$$

le polynôme $f(z, i)$ étant le même pour tous les cas appartenant au même degré.

Si l'on emploie le second système (9), on trouve

$$r_1 \equiv b, \qquad s'_1 \equiv (-1)^{\frac{n+1}{2}}(b+1);$$

on est ainsi conduit à l'équation

$$(35) \qquad f\left(i^{ab}\sqrt{k},\, i^{-a}\right) = 0,$$

qui, par conséquent, est satisfaite par les mêmes valeurs de $\sqrt{k}$ appartenant au degré n que la précédente.

En chassant le radical $\sqrt{k}$ et les puissances impaires de k, on obtient donc, pour toutes les valeurs de b, une même équation en k^2, qui semble contenir encore i^a; mais on verra tout à l'heure que i^a disparaît avec k.

Cherchons les racines de l'équation (34). Évidemment elle n'est satisfaite par aucune des valeurs $\sqrt{k} = 0, \pm 1, \pm i$. Elle n'est pas non plus satisfaite par des modules de la première espèce; c'est une conséquence de ce que les nombres r_1, s'_1 sont de parités contraires. Pour que le carré d'un module de seconde espèce satisfasse à l'équation (34), il faut évidemment que, dans l'équation (28), a_1, c_1, x et y soient des nombres impairs, x et y premiers entre eux. Réciproquement, si ces conditions sont remplies, et si le degré n_1 du module vérifie la relation

$$4n = x^2 + y^2(4n_1 - 1),$$

on peut déterminer les signes de l et $\sqrt{l}$, de sorte que $\sqrt{l}$ soit une racine de l'équation. En effet, les autres conditions à remplir sont

$$\frac{xy-1}{2}a_1 + a_1 b_1 \equiv a(b+1), \qquad \frac{xy-1}{2}a_1 - a_1 b_1 \equiv -ab \pmod 4$$

ou bien

$$x \equiv y a a_1, \qquad b_1 \equiv a a_1 (b+1) - \frac{xy+1}{2};$$

or on satisfait à ces congruences en choisissant arbitrairement le signe de y, déterminant le signe de x par la première congruence, et la valeur de b_1 (mod 4) par la seconde. Cette dernière détermination est possible sans changer l^2 ni a_1, et la valeur de $\sqrt{l}$ se trouve par là complètement déterminée. Puisque, le signe de y étant choisi, celui de x est déterminé, la multiplicité de la racine $\sqrt{l}$ est égale au quart du nombre des solutions de l'équation $4n = x^2 + y^2(4n_1 - 1)$ en nombres premiers entre eux.

En cherchant de la même manière les racines de l'équation (35), on trouve, en désignant par x' et b'_1 les valeurs de x et de b_1 qui s'y rapportent,

$$x' \equiv -y a a_1 \pmod{4};$$

d'où

$$x' = -x, \qquad b'_1 \equiv a a_1 (b+1) + \frac{x' y - 1}{2} \equiv a a_1 (b+1) - \frac{xy+1}{2} \equiv b_1.$$

Il s'ensuit que les équations (34), (35) ont les mêmes racines, et, comme d'ailleurs leur degré 2N est divisible par 4, excepté pour $n=1$, les deux polynômes formant les premiers membres sont identiques, à cette exception près.

En faisant $b \equiv -1$, on trouve

$$f(\sqrt{k}, i^a) = f(i^{-a}\sqrt{k}, i^{-a});$$

d'où l'on peut conclure qu'on a

$$f(\sqrt{k}, i^a) = \varphi(k^2) + (1+i^a)k\sqrt{k}\,\varphi_1(k^2) \\ + i^a k\,\varphi_2(k^2) + (1-i^a)\sqrt{k}\,\varphi_3(k^2),$$

φ, φ_1, φ_2, φ_3 dénotant des polynômes à coefficients entiers; de plus, le premier et le dernier coefficient de $\varphi(k^2)$ sont égaux à 1, comme il est facile de le voir. Pour $n=1$, on a

$$k + (1+i^a)\sqrt{k} - i^a = 0.$$

En chassant $\sqrt{k}$, on obtient une équation de la forme $f_1(i^a k) = 0$, et en chassant, de plus, les puissances impaires de k, une équation de la forme $f_2(k^2) = 0$, où i a disparu.

Les équations trouvées n'ont pas, comme celles des numéros précédents, la propriété que les modules du degré n sont les seules racines simples; mais, si l'on connaît déjà les équations répondant aux degrés inférieurs à n, on peut débarrasser les équations des racines étrangères par une série de divisions. En considérant spécialement l'équation $f(\sqrt{k}, i) = 0$, qui répond à $a \equiv -b \equiv 1 \pmod 4$, on fera $x \equiv y a_1$, ou bien, puisque, d'après ce qui a été dit, il suffit de prendre $a_1 \equiv 1$,

$$x \equiv y, \qquad b_1 \equiv -\frac{xy+1}{2}.$$

On obtient ainsi finalement une équation $F(\sqrt{k}, i) = 0$, qui n'est satisfaite que par les modules de la seconde espèce du degré n; on en déduit une équation en k, $F_1(ik) = 0$, et enfin une en k^2, $F_2(k^2) = 0$; il est facile de voir que, dans cette dernière équation, le premier et le dernier coefficient sont 1. On voit aussi que $(1 - i^a)\sqrt{k}$ s'exprime en fonction rationnelle de k^2, et que généralement, sans aucune hypothèse sur les valeurs de a et de b, on a

$$(1 - i^a) i^{a(b+1)} \sqrt{k} = \psi(k^2),$$

la fonction rationnelle ψ étant la même pour toutes les valeurs de ces nombres.

Exemple. — En faisant, dans l'équation modulaire répondant à $n = 3$,

$$k^2 - 4\sqrt{k^3}\sqrt{k_0^3} + 6kk_0 - 4\sqrt{k}\sqrt{k_0} + k_0^2 = 0,$$

$$\sqrt{k_0} = -i\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}},$$

et écrivant z au lieu de $\sqrt{k}$, on trouve

$$z^8 + 4(1+i)z^7 - 8iz^6 + 4(1-i)z^5$$
$$+ 14z^4 - 4(1+i)z^3 + 8iz^2 - 4(1-i)z + 1 = 0.$$

Puisque

$$4.3 = 3^2 + 1^2.3,$$

on a

$$y = 1,$$

donc on doit prendre

$$x = -3, \qquad b_1 = \frac{-3+1}{2} = 1,$$

c'est-à-dire qu'il faut diviser l'équation trouvée par

$$z^2 - (1+i)z - i,$$

ce qui donne

$$z^6 + 5(1+i)z^5 + 3iz^4 - 4(1-i)z^3 + 3z^2 - 5(1+i)z + i = 0;$$

en chassant les puissances impaires de z et écrivant k au lieu de z^2, on retrouve l'équation du n° **12**.

Le corollaire d'Arithmétique qu'on peut tirer de ce qui précède est des plus simples; en égalant le degré de l'équation $F_2(k^2) = 0$ au nombre de ses racines, on trouve

$$F_1(4n-1) + F_1(4n-3^2) + F_1(4n-5^2) + \ldots = N.$$

Dans cette formule, n désigne un nombre impair; F_1 a la même signification qu'au n° **10**, seulement on ne doit compter que les classes dans lesquelles l'un au moins des coefficients extérieurs est impair.

15. Pour les degrés pairs, le nombre N des transformations qui ne se déduisent pas linéairement les unes des autres est exprimé par la même formule que pour les degrés impairs, c'est-à-dire qu'en faisant

$$n = 2^\pi q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots,$$

$2, q_1, q_2, \ldots$ étant les facteurs premiers de n, on a

$$N = 2^{\pi-1}.3 q_1^{\beta_1-1}(q_1+1) q_2^{\beta_2-1}(q_2+1)\ldots;$$

mais on sait que les N modules correspondants ne sont pas, comme pour

les degrés impairs, racines d'une même équation irréductible. Il faut d'abord distinguer le cas où le nombre δ [équat. (20)] est pair de celui où δ est impair, et l'on vérifie sans peine que, des N transformations linéairement indépendantes, un tiers répond au premier cas, les deux tiers au second.

Cas I : *Si δ est un nombre pair.* — Pour avoir les équations modulaires les plus simples, nous choisirons les transformations principales un peu autrement que pour les degrés impairs.

En désignant par δ' le plus grand commun diviseur des nombres r', s', qui figurent dans l'équation (18) du n° **8**, nous ferons

$$r' = \rho'\delta', \qquad s' = \sigma'\delta', \qquad n' = \rho s' - r'\sigma = \delta'(\rho\sigma' - \rho'\sigma) = \delta' n'';$$

d'où

$$n = \delta\delta' n''.$$

En remplaçant les équations (21) par les suivantes

$$\mu\rho - m\sigma = t',$$
$$-\mu\rho' + m\sigma' = 1,$$

l'expression (19) devient

$$\lambda\left(\theta + \frac{\delta'.2\omega + t'\delta\omega'}{n}\right) \quad \text{ou bien} \quad \lambda\left(\theta + \frac{\Omega'}{n}\right),$$

en posant

$$\Omega' = \delta'.2\omega + t'\delta\omega'.$$

Comme au n° **8**, nous pouvons rendre t' premier à δ'; les valeurs de l'expression (19) peuvent donc être écrites sous la forme

$$\lambda\left(\theta + \frac{p\Omega'}{n}\right), \qquad \text{où} \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

De plus, nous choisirons le signe de δ' de manière à avoir $\delta' \equiv 1 \pmod 4$. Cela posé, nous prendrons pour transformations principales celles qui sont définies par les équations

$$(36) \qquad \begin{cases} \varepsilon_0 . 2\omega = t'\delta . 2\omega_0 + \delta n''\omega'_0, \\ \varepsilon_0 . \ \omega' = \quad \delta'.2\omega_0. \end{cases}$$

En faisant

$$\varphi(\theta) = \prod_{0}^{n-1} \lambda\left(\theta + p\frac{\Omega'}{n}\right) = -\lambda^2(\theta) \prod_{1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\lambda^2(\theta) - \lambda^2\left(\frac{p}{n}\Omega'\right)}{1 - k^2\lambda^2(\theta)\lambda^2\left(\frac{p}{n}\Omega'\right)},$$

on est conduit aux formules suivantes

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda\left(\varepsilon_0\theta + \frac{\omega_0}{2}, k_0\right) &= \frac{1 + (-k)^{\frac{n}{2}}\varphi(\theta)}{1 - (-k)^{\frac{n}{2}}\varphi(\theta)}, \\ k_0 &= \frac{1 - (-k)^{\frac{n}{2}}\varphi\left(\frac{1}{2n}\Omega'\right)}{1 + (-k)^{\frac{n}{2}}\varphi\left(\frac{1}{2n}\Omega'\right)}. \end{aligned} \right.$$

L'expression $\varphi\left(\frac{1}{2n}\Omega'\right)$ est une fonction rationnelle des quantités $\lambda^2\left(\frac{p}{2n}\Omega'\right)$; or $\lambda^2\left(\frac{n}{2}\frac{1}{2n}\Omega'\right)$ ou $\lambda^2\left(\frac{1}{4}\Omega'\right)$ est égal à 1 si $\frac{t'\delta}{2}$ est pair, mais égal à $\frac{1}{k^2}$ si $\frac{t'\delta}{2}$ est impair.

Donc, en faisant

$$\lambda^2\left(\frac{n}{2}\theta\right) = f[\lambda^2(\theta)],$$

les quantités $\lambda^2\left(\frac{p}{2n}\Omega'\right)$ sont racines de l'équation $f(x) = 1$ dans le premier cas, mais de l'équation $f(x) = \frac{1}{k^2}$ dans le second; par suite, les équations modulaires sont différentes dans les deux cas.

Si maintenant n est impairement pair, $\frac{\delta}{2}$ et n'' sont impairs; le nombre t', n'étant déterminé que par rapport au module n'', peut être choisi pair ou impair à volonté. Nous le supposerons pair; l'équation modulaire principale sera donc déterminée par les équations

$$k_0 = \frac{1 + k^{\frac{n}{2}}\varphi\left(\frac{1}{2n}\Omega'\right)}{1 - k^{\frac{n}{2}}\varphi\left(\frac{1}{2n}\Omega'\right)}, \qquad \lambda^2\left(\frac{1}{4}\Omega'\right) = 1;$$

on a ainsi une équation en k_0 du degré $\frac{1}{3}$N, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de k à coefficients entiers. La première des équations (37) peut être remplacée par la suivante :

$$(38)\quad \lambda(\varepsilon_0\theta, k_0) = \frac{\varepsilon_0\lambda(\theta)}{\mu(\theta)\nu(\theta)}\prod_1^{\frac{n-2}{4}} \frac{\left[1-\dfrac{\lambda^2(\theta)}{\lambda^2\left(\dfrac{p}{n}\Omega'\right)}\right]\left[1-k^2\lambda^2\left(\dfrac{p}{n}\Omega'\right)\lambda^2(\theta)\right]}{\left[1-\dfrac{\lambda^2(\theta)}{\lambda^2\left(\dfrac{2p-1}{2n}\Omega'\right)}\right]\left[1-k^2\lambda^2\left(\dfrac{2p-1}{2n}\Omega'\right)\lambda^2(\theta)\right]};$$

en employant cette équation, le multiplicateur ε_0 est complètement déterminé,

$$\varepsilon_0 = i\left[1-k^{\frac{n}{2}}\varphi\left(\frac{1}{2n}\Omega'\right)\right]\prod_1^{\frac{n-2}{4}}\frac{\lambda^2\left(\dfrac{p}{n}\Omega'\right)}{\lambda^2\left(\dfrac{2p-1}{2n}\Omega'\right)};$$

dans l'équation (37), son signe est arbitraire.

En faisant abstraction du facteur ε_0, les coefficients du second membre de (38) sont des fonctions rationnelles de k et de k_0 à coefficients entiers, tandis que ε_0 est égal à une telle fonction multipliée par i.

Si, au contraire, n est divisible par 4, $\frac{\delta}{2}$ peut être pair ou impair, et, dans ce dernier cas, n'' est pair, et, par suite, t' est impair. On a donc, pour les valeurs pairement paires de n, deux équations modulaires principales, définies par l'équation

$$k_0 = \frac{1-k^{\frac{n}{2}}\varphi\left(\dfrac{1}{2n}\Omega'\right)}{1+k^{\frac{n}{2}}\varphi\left(\dfrac{1}{2n}\Omega'\right)}$$

avec

$$\lambda^2\left(\frac{1}{4}\Omega'\right) = 1 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2\left(\frac{1}{4}\Omega'\right) = \frac{1}{k^2}.$$

Nous appellerons la première l'équation modulaire Ia, la seconde l'équation Ib; leurs coefficients sont évidemment des fonctions rationnelles de k^2 à coefficients entiers.

On a, dans les deux cas,

$$(39)\quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda(\varepsilon_0\theta, k_0) = \varepsilon_0\,\lambda(\theta)\,\mu(\theta)\,\nu(\theta) \\ &\qquad\times \frac{\displaystyle\prod_{1}^{\frac{n}{4}-1}\left[1-\frac{\lambda^2(\theta)}{\lambda^2\left(\frac{p}{n}\Omega'\right)}\right]\left[1-k^2\lambda^2\left(\frac{p}{n}\Omega'\right)\lambda^2(\theta)\right]}{\displaystyle\prod_{0}^{\frac{n}{4}-1}\left[1-\frac{\lambda^2(\theta)}{\lambda^2\left(\frac{2p+1}{2n}\Omega'\right)}\right]\left[1-k^2\lambda^2\left(\frac{2p+1}{2n}\Omega'\right)\lambda^2(\theta)\right]} \end{aligned} \right.$$

et, de plus,

$$\varepsilon_0 = i\left[1+k^{\frac{n}{2}}\varphi\left(\frac{1}{2n}\Omega'\right)\right]\frac{\displaystyle\prod_{1}^{\frac{n}{4}-1}\lambda^2\left(\frac{p}{n}\Omega'\right)}{\displaystyle\prod_{0}^{\frac{n}{4}-1}\lambda^2\left(\frac{2p+1}{2n}\Omega'\right)} \qquad \text{pour le cas I}a,$$

$$\varepsilon_0 = \frac{i}{k}\left[1+k^{\frac{n}{2}}\varphi\left(\frac{1}{2n}\Omega'\right)\right]\frac{\displaystyle\prod_{1}^{\frac{n}{4}-1}\lambda^2\left(\frac{p}{n}\Omega'\right)}{\displaystyle\prod_{0}^{\frac{n}{4}-1}\lambda^2\left(\frac{2p+1}{2n}\Omega'\right)} \qquad \text{pour le cas I}b.$$

En désignant pour un moment par $2\omega_1$, ω'_1 un couple de périodes elliptiques appartenant au module $-k_0$, on peut faire

$$2\omega_0 = 2\omega_1, \qquad \omega'_0 = \delta'.2\omega_1 + \omega'_1;$$

d'où

$$\varepsilon_0.2\omega = (l' + n''\delta')\delta.2\omega_1 + \delta n''\omega'_1,$$

$$\varepsilon_0.\ \omega' = -\delta'.2\omega_1.$$

De ces équations on conclut que, lorsque $\frac{n}{2}$ est impair, $-k_0$ ne satisfait pas à l'équation modulaire I, puisque, dans ce cas, $l' + n''\delta'$ est

impair; par conséquent, cette équation contient des puissances impaires de k_0. Au contraire, si $\frac{n}{2}$ est pair, les équations modulaires I a et I b ne contiennent que des puissances paires de k_0. De plus, en désignant par Ω'' la nouvelle valeur de Ω', on a

$$\Omega'' = \Omega' + \omega' n;$$

d'où

$$\lambda\left(\frac{p}{n}\Omega''\right) = \lambda\left(\frac{p}{n}\Omega'\right), \qquad \lambda\left(\frac{2p+1}{2n}\Omega''\right) = \frac{1}{k\lambda\left(\frac{2p-1}{2n}\Omega'\right)},$$

de sorte que les formules (38), (39) ne sont pas altérées quand on change le signe de k_0. Donc, abstraction faite du facteur ε_0, les coefficients des seconds membres sont des fonctions rationnelles de k et de k_0^2 si $\frac{n}{2}$ est impair, de k^2 et de k_0^2 si $\frac{n}{2}$ est pair; ε_0 est évidemment de la forme $i\psi(k, k_0^2)$ si $\frac{n}{2}$ est impair; mais, si $\frac{n}{2}$ est pair, il est des formes $i\psi(k^2, k_0^2)$ ou $\frac{i}{k}\psi(k^2, k_0^2)$, suivant que la transformation appartient au cas I a ou au cas I b. Il est d'ailleurs facile de voir que ces dernières transformations se déduisent l'une de l'autre, en remplaçant k par $\frac{1}{k}$.

Voici les équations modulaires dans les cas les plus simples :

$n = 2\ldots\quad k_0 = \frac{1-k}{1+k}$;

$n = 4\ldots\quad$ équat. I a: $k_0^2 = k'^2$; équat. I b: $k_0^2 k^2 + k'^2 = 0$;

$n = 8\ldots\quad$ équat. I a: $k^4 k_0^4 = 16 k'^2 k_0'^2$; équat. I b: $k_0^4 + 16 k_0'^2 k^2 k'^2 = 0$.

CAS II : *Si δ est impair*. — Nous poserons, dans le reste de ce numéro,

$$n = 2^\pi n_0,$$

n_0 étant impair, et nous désignerons par k_0 le module qu'on déduit de k par une transformation principale du degré n_0 et généralement par k_r celui qu'on obtient par une transformation principale du degré $2^r n_0$. Comme pour les degrés impairs, nous définissons la transformation

principale du degré n par les équations

$$(40)\qquad \begin{cases} \varepsilon_\pi . 2\omega = \delta . 2\omega_\pi, \\ \varepsilon_\pi . \ \omega' = -t . 2\omega_\pi + n'\omega'_\pi; \end{cases}$$

nous supposons le signe de δ défini par la congruence $\delta \equiv 1 \pmod 4$, et nous faisons $t.2\omega + \delta\omega' = \Omega$. Cela posé, on a

$$\lambda(\varepsilon_\pi \theta, k_\pi) = \varepsilon_\pi \lambda(\theta) \prod \frac{1 - k^2 \lambda^2\left(\frac{p}{n}\Omega\right)\lambda^2(\theta)}{1 - k^2\lambda^2\left(\frac{2p+1}{2n}\Omega\right)\lambda^2(\theta)},$$

$$\varepsilon_\pi = \prod \frac{\nu^2\left(\frac{2p+1}{2n}\Omega\right)}{\nu^2\left(\frac{p}{n}\Omega\right)},$$

$$k_\pi = \frac{1}{\lambda\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2n}\Omega\right)} \prod \frac{\nu^2\left(\frac{p}{n}\Omega\right)}{\nu^2\left(\frac{2p+1}{2n}\Omega\right)} \frac{1 - k^2\lambda^2\left(\frac{2p+1}{2n}\Omega\right)\lambda^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2n}\Omega\right)}{1 - k^2\lambda^2\left(\frac{p}{n}\Omega\right)\lambda^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2n}\Omega\right)},$$

où il faut donner à p les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \left(\frac{n}{2} - 1\right)$.

Le module transformé k_π est lié à k par une équation algébrique entre k_π et $i^t\sqrt{k}$, dont les coefficients sont des nombres entiers. Pour le démontrer, posons

$$(41)\qquad \begin{cases} \varepsilon_0 . 2\omega = \delta_0 . 2\omega_0, \\ \varepsilon_0 \ \ \omega' = -t_0 . 2\omega_0 + n'_0\omega'_0, \end{cases}$$

où $n_0 = \delta_0 n'_0$, $\delta_0 \equiv 1 \pmod 4$, t_0 premier à δ_0 et divisible par 4; soit, de plus,

$$(42)\qquad \begin{cases} \varepsilon' . 2\omega_0 = 2\omega_1, \\ \varepsilon' \ \ \omega'_0 = -m . 2\omega_1 + 2\omega'_1. \end{cases}$$

On en tire

$$(43)\qquad k_1 = \frac{2 i^m \sqrt{k_0}}{1 + i^{2m} k_0}$$

et

$$\varepsilon_0 \varepsilon' . 2\omega = \delta_0 . 2\omega_1,$$
$$\varepsilon_0 \varepsilon' \cdot \omega' = -(t_0 + mn'_0) 2\omega_1 + 2n'_0 \omega'_1.$$

Ces équations définissent une transformation du degré $2n_0$ appartenant au cas que nous considérons; en les comparant aux équations (40), on a

$$\pi = 1, \qquad t = t_0 + mn'_0 \equiv mn'_0 \qquad (\text{mod} 4);$$

l'équation modulaire entre k_1 et $\sqrt{k}$ s'obtient en éliminant $\sqrt{k_0}$ entre l'équation (43) et l'équation modulaire principale appartenant au degré n_0

$$f_0(\sqrt{k_0}, \sqrt{k}) = 0.$$

Or il suit de ce qui a été dit au nº **9** qu'on a

$$f_0(i^m \sqrt{k_0}, i^{mn_0} \sqrt{k}) = 0,$$

donc l'élimination de $\sqrt{k_0}$ donnera une équation de la forme

$$f_1(k_1, i^{mn_0} \sqrt{k}) = f_1(k_1, i^t \sqrt{k}) = 0,$$

ce qui démontre l'assertion faite plus haut pour le cas où $\pi = 1$. Il est à remarquer que, pour $\pi = 1$, il suffit de distinguer deux cas au lieu de quatre, en se bornant, par exemple, à faire $t \equiv 0$ et $t \equiv 1$ (mod 4), puisque, en changeant le signe de $\sqrt{k}$, on ne fait que changer celui de k_1, de sorte que les deux autres cas se déduisent de ceux-ci par une transformation linéaire.

Pour achever la démonstration, on n'a qu'à faire subir au module k_1 une série de transformations successives, définies par les équations

$$\varepsilon^{(j+1)} 2\omega_j = 2\omega_{j+1},$$
$$\varepsilon^{(j+1)} \omega'_j = 2\omega'_{j+1},$$
$$k_{j+1} = \frac{2\sqrt{k_j}}{1 + k_j},$$

et qui n'altèrent pas la valeur de $t \pmod 4$. Il est facile de voir que l'équation finale est du degré $\frac{1}{3}$N en k_π, et qu'à partir de $\pi = 2$ elle ne contient que des puissances paires de k_π.

En chassant $\sqrt{k}$ et les puissances impaires de k, on obtient une équation en k_π^2 et k^2, qui a la propriété de ne pas être altérée en changeant k_π et k respectivement en k', k'_π. Soient, en effet,

$$F_\pi(k_\pi^2, k^2) = 0, \qquad F_0(k_0^2, k^2) = 0, \qquad \varphi_\pi(k_\pi^2, k^2) = 0$$

les équations entre les carrés des modules appartenant respectivement aux degrés $2^\pi n_0$, n_0 et 2^π ; on trouve d'abord

$$\varphi_1(k_1^2, k^2) = k_1^4 k'^4 - 16 k_1'^2 k^2,$$

ce qui démontre la proposition pour $n = 2$. De plus, l'équation $\varphi_\pi(k_\pi^2, k^2) = 0$ résulte de l'élimination de $k_1, k_2, \ldots, k_{\pi-1}$ entre les équations

$$k_\pi^4 k_{\pi-1}'^4 = 16 k_\pi'^2 k_{\pi-1}^2, \qquad k_{\pi-1}^4 k_{\pi-2}'^4 = 16 k_{\pi-1}'^2 k_{\pi-2}^2, \qquad \ldots, \qquad k_1^4 k'^4 = 16 k_1'^2 k^2 :$$

or, en changeant k_j en $k'_{\pi-j}$, ces équations sont reproduites dans l'ordre inverse ; d'où l'on conclut qu'on a

$$\varphi_\pi(k'^2, k_\pi'^2) = 0 :$$

donc la proposition est démontrée pour $n = 2^\pi$. L'équation

$$F_\pi(k_\pi^2, k^2) = 0$$

s'obtient en éliminant k_0 entre les équations

$$F_0(k_0^2, k^2) = 0, \qquad \varphi_\pi(k_\pi^2, k_0^2) = 0 ;$$

on trouve la même équation en éliminant $\varkappa$ entre les équations

$$\varphi_\pi(\varkappa^2, k^2) = 0, \qquad F_0(k_\pi^2, \varkappa^2) = 0 ;$$

c'est ce qu'on voit aisément au moyen des relations entre les périodes.

Mais ce dernier système entraîne le suivant

$$F_0(\varkappa'^2, k'^2_\pi) = 0, \qquad \varphi_\pi(k'^2, \varkappa'^2) = 0,$$

qui donne enfin

$$F_\pi(k'^2, k'^2_\pi) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En désignant par N_0 le degré de l'équation $F_0(k_0^2, k^2) = 0$, par $\Psi_\pi(k_\pi^2, k^2)$ un polynôme à coefficients entiers, l'équation $F_\pi(k_\pi^2, k^2) = 0$ peut être mise sous la forme suivante

$$k_\pi^{2^{\pi+1}N_0} k'^{2^{\pi+1}N_0} + 4 k_\pi^2 k^2 \Psi_\pi(k_\pi^2, k^2) \pm 16^{(2^\pi - 1)N_0} k^{2N_0} k'^{(2^{\pi+1}-4)N_0} = 0,$$

où les plus hautes puissances de k_π et de k n'entrent que dans le premier terme. En effet, on a vu qu'on obtient l'équation $F_1(k_1^2, k^2) = 0$ en faisant, dans l'équation $F_0(k_1^2, \varkappa^2) = 0$, $\varkappa^2 = \dfrac{4k}{(1+k)^2}$ et chassant les puissances impaires de k, c'est-à-dire qu'on a

$$F_1(k_1^2, k^2) = (1-k^2)^{2N_0} F_0\left[k_1^2, \frac{4k}{(1+k)^2}\right] F_0\left[k_1^2, \frac{-4k}{(1-k)^2}\right].$$

Or, en développant $(1 \pm k)^{2N_0} F_0\left[k_1^2, \dfrac{\pm 4k}{(1 \pm k)^2}\right]$, on a, comme on le voit aisément, un résultat de la forme

$$k_1^{2N_0}(1 \pm k)^{2N_0} \pm 4 k_1^2 k \psi(k_1^2, \pm k) + 4^{N_0}(\pm k)^{N_0} = 0,$$

où les plus hautes puissances de k_1 et de k ne se trouvent qu'au premier terme. En faisant le produit, on a

$$F_1(k_1^2, k^2) = k_1^{4N_0} k'^{4N_0} + 4 k_1^2 k^2 \Psi_1(k_1^2, k^2) + (-1)^{N_0} 16^{N_0} k^{2N_0}.$$

Donc la proposition est démontrée pour $\pi = 1$, et l'on démontre aisément de la même manière qu'elle a lieu pour $\pi = m+1$, si elle a lieu pour $\pi = m$.

Ainsi le terme du plus haut degré a le coefficient 1. Le terme du plus petit degré a pour coefficient une puissance de 16; on le démontre en remarquant que le premier terme du développement de k_π^2 suivant les

puissances fractionnaires croissantes de k^2 est $16^{\frac{n'-\delta}{n'}} e^{\frac{2t\pi i}{n'}} k^{\frac{2\delta}{n'}}$, de sorte que, pour les petites valeurs de k, on a

$$F_\pi(k_\pi^2, k^2) = (1-k^2)^{2^\pi N_0} \prod \left(k_\pi^2 - 16^{\frac{n'-\delta}{n'}} e^{\frac{2t\pi i}{n'}} k^{\frac{2\delta}{n'}} - \ldots\right).$$

Évidemment dans l'équation entre k_π et $i^t\sqrt{k}$ le terme du plus haut degré a pour coefficient 1, celui du plus petit une puissance de 2.

Pour mettre l'équation Ia sous une forme semblable, on peut remarquer qu'on trouve le module transformé k_π en posant $k = \frac{1-k_1}{1+k_1}$ et faisant subir au module k_1 une transformation principale du cas II, appartenant au degré $2^{\pi-1}$ et à une valeur paire du nombre t; on le démontre aisément par les relations qui ont lieu entre les rapports des périodes. Il s'ensuit qu'on a l'équation cherchée en éliminant k_2 et k_1 entre les équations

$$F_{\pi-2}(k_\pi^2, k_2^2) = 0, \qquad k_2^2 = \frac{4k_1}{(1+k_1)^2}, \qquad k_1 = \frac{1-k}{1+k};$$

or on trouve $k_2^2 = k'^2$: donc l'équation Ia est

$$F_{\pi-2}(k_\pi^2, k'^2) = 0;$$

par conséquent, si $\pi > 2$, elle peut être écrite sous la forme suivante

$$k_\pi^{2^{\pi-1}N_0} k^{2^{\pi-1}N_0} + 4k_\pi^2 k'^2\, \Psi_{\pi-2}(k_\pi^2, k'^2) \pm 16^{(2^{\pi-2}-1)N_0} k'^{2N_0} k^{(2^{\pi-1}-4)N_0} = 0,$$

où les plus hautes puissances de k_π et de k ne se trouvent qu'au premier terme; évidemment cette équation n'est pas altérée en échangeant entre eux k_π et k.

16. *Modules de la première espèce et de la première catégorie d'un degré pair.* — Puisque a est pair, b est aussi pair; d'où l'on conclut que c est impair, δ pair. Par suite, il faut employer les transformations principales du cas I, qui sont définies par les équations

$$\varepsilon_0 . 2\omega = t'\delta . 2\omega_0 + \delta n'' \omega'_0,$$
$$\varepsilon_0 . \ \omega' = -\delta' . 2\omega_0;$$

donc les équations (24) deviennent

$$t'\delta r_1 + \delta n'' r'_1 = b, \qquad t'\delta s_1 + \delta n'' s'_1 = a, \qquad \delta' r_1 = c, \qquad \delta' s_1 = b.$$

Supposons d'abord que $\frac{n}{2}$ soit impair. Dans ce cas on a évidemment $a \equiv \delta \equiv 2 \pmod 4$, n'' est impair; en se rappelant que nous supposons t' pair, $\delta' = 1$, on voit de plus qu'on a $2r'_1 \equiv b \equiv s_1 \pmod 4$. Si maintenant b est divisible par 4, s_1 l'est aussi, et r'_1 est pair; donc il faut faire

$$(44) \qquad k_0 = k, \qquad \varepsilon_0 = i^c\sqrt{n}, \qquad \lambda(i\sqrt{n}\theta) = (-1)^{\frac{c-1}{2}}\,\mathrm{Y}.$$

Si, au contraire, $b \equiv 2 \pmod 4$, on a $s_1 \equiv 2$, r'_1 est impair; par suite, on fera

$$k_0 = -\frac{1}{k}, \qquad \varepsilon_0 = i^c k\sqrt{n}, \qquad \lambda(i\sqrt{n}\theta) = \frac{(-1)^{\frac{c-1}{2}}}{k}\,\mathrm{Y}.$$

En substituant dans l'équation modulaire les valeurs de k_0, on obtient deux équations en k. On trouve les mêmes équations en remplaçant dans l'équation modulaire en k et en k_0, appartenant au degré $\frac{n}{2}$, le module transformé k_0 respectivement par $\frac{1-k}{1+k}$, $-\frac{1+k}{1-k}$; par suite les premiers et les derniers coefficients des équations sont ± 1. On en peut aussi conclure que si la première des deux équations est satisfaite par un module l, elle est aussi satisfaite par $-\frac{1}{l}$, pendant que la seconde équation a les racines $-l$, $\frac{1}{l}$; donc les deux équations en k ne donnent qu'une seule équation k^2. Aucune de ces équations n'est satisfaite par $k = 0$, $k = \pm 1$.

Cherchons maintenant les racines des équations trouvées. Pour que les formules (27) définissent un module de la première espèce, l, satisfaisant à l'une des équations, il faut qu'on ait (n° **8**)

$$\mathrm{S}_1 \equiv s_1 \equiv b \pmod 4, \qquad \mathrm{R}'_1\mathrm{S}'_1 \equiv r'_1 s'_1 \pmod 2;$$

les nombres R_1, S_1, R'_1, S'_1 étant déterminés de la manière suivante

$$t'\delta R_1 + \delta n'' R'_1 = x + b_1 y, \qquad \delta' R_1 = y c_1,$$
$$t'\delta S_1 + \delta n'' S'_1 = y a_1, \qquad \delta' S_1 = -x + b_1 y;$$

on en conclut que, pour la première équation,

$$x + y b_1 \equiv x - y b_1 \equiv 0 \pmod 4$$

et, pour la seconde,

$$x + y b_1 \equiv x - y b_1 \equiv 2,$$

et que $y a_1$ est pair, $y c_1$ impair. Donc x sera pair, y impair, b_1 pair. La relation

$$x^2 + y^2 n_1 = n$$

fait voir que $n_1 \equiv 2$ et, par suite,

$$a_1 \equiv 2 \pmod 4.$$

Puisque $b_1 \equiv x \pmod 4$ pour la première équation, $b_1 \equiv x + 2$ pour la seconde, l appartiendra alternativement à la première ou à la seconde équation relative au degré n_1, quand on donne à x les valeurs $0, 2, 4, \ldots$. Évidemment l n'est racine simple que pour $x = 0$. Enfin on voit sans peine que les équations ne sont satisfaites par aucun module de la seconde espèce.

En se débarrassant des modules dont les degrés sont moindres que n, on obtient donc deux équations qui, en chassant les puissances impaires de k, se réunissent en une seule équation en k^2, dont évidemment le premier et le dernier coefficient sont 1. De plus on voit que k peut être exprimé en fonction rationnelle de k^2.

Exemples. — Pour $n = 2$, on a les équations

$$k = \frac{1-k}{1+k} \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{k} = \frac{1-k}{1+k}$$

ou

$$k^2 + 2k - 1 = 0, \qquad k^2 - 2k - 1 = 0;$$

d'où

$$k^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

$n = 6$. — Si dans l'équation modulaire appartenant au degré 3

$$(k^2 + 6kk_0 + k_0^2)^2 - 16kk_0(1 + kk_0)^2 = 0,$$

on fait $k_0 = \frac{1-k}{1+k}$, on a

$$(k^2 - 2k - 1)^2(k^4 + 12k^3 + 2k^2 - 12k + 1) = 0;$$

le second facteur donne les modules de sixième degré; on trouve

$$k^2 = (2 + \sqrt{3})^2(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2.$$

Supposons maintenant que $\frac{n}{2}$ soit pair; a étant divisible par 4, il faut employer l'équation modulaire Ia ou Ib, suivant que b est divisible par 4 ou non. Dans le premier cas, il faut faire $k_0^2 = k^2$; dans le second, $k_0^2 = \frac{1}{k^2}\cdot$ Au moyen de la relation

$$\zeta_0 = -\frac{\delta' + t'\delta\zeta}{\delta n''\zeta},$$

on peut se convaincre que les deux équations, qu'on obtient en substituant dans les équations modulaires les valeurs de k_0^2, ne sont jamais satisfaites par $k^2 = 1$, et que la première équation admet la racine $k^2 = 0$, quand n est divisible par 16, la seconde quand $n \equiv 4 \pmod 8$. En supposant les équations débarrassées de la racine zéro, les carrés des modules du degré n sont les seules racines simples; les autres racines sont les modules de la première espèce et de la première catégorie dont le degré n_1 vérifie la relation $n = x^2 + y^2 n_1$, x et y étant premiers entre eux, et x pair; par suite, n_1 est toujours divisible par 4. Ces modules sont distribués entre les deux équations de la manière suivante : dans la première équation un module du degré n_1, qui lui satisfait, appartient à la première ou à la seconde équation relative au degré n_1, suivant que x est divisible par 4 ou non; l'inverse a lieu

pour la seconde équation. Tout cela se démontre de la même manière que dans le cas où $\frac{n}{2}$ est impair. En débarrassant les équations des racines appartenant à des degrés moindres que n, on a donc deux équations en k^2 qui n'admettent d'autres racines que les modules cherchés. Il est facile de voir que les racines de l'une de ces équations sont les réciproques de celles de l'autre. Des remarques faites au numéro précédent sur la forme des équations modulaires, il suit que, si $n \equiv 4 \pmod 8$, le premier coefficient de la première équation est une puissance de 2, le dernier est 1. Si n est divisible par 8, le premier coefficient de la première équation est évidemment 1. Quant au dernier, il ne peut être qu'une puissance de 2; on peut le démontrer par la considération de l'équation qu'on obtient en faisant $\sqrt{k_0} = -\sqrt{k}$ dans l'équation modulaire appartenant au degré $4n+1$. Les expressions de ε_0 et de $\lambda(i\sqrt{n}\theta)$ en $\sqrt{n}$ et en Y sont les mêmes que pour les valeurs impairement paires de n. Remarquons qu'en vertu de la congruence évidente $a - 2b \equiv n \pmod 8$, la valeur de $a \pmod 8$ est déterminée par celle de $b \pmod 4$, de telle manière que le premier ou le dernier coefficient de l'équation est égal à 1, suivant que $a \equiv 0$ ou $4 \pmod 8$.

Exemples. — Pour $n = 4$ on trouve

$$k^2 = \tfrac{1}{2}, \qquad k^2 = 2.$$

$n = 8$. — On trouve les deux équations

$$k^8 = 16k'^4, \qquad 1 - 16k'^4k^4 = 0$$

ou bien

$$(k^2-2)^2(k^4+4k^2-4) = 0, \qquad (2k^2-1)^2(4k^4-4k^2-1) = 0;$$

les derniers facteurs donnent les modules de huitième degré

$$k^2 = 2(\sqrt{2}-1), \qquad k^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Voici encore les modules du douzième et du seizième degré.

$n=12$:

$$k^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}, \qquad k^2=4(2+\sqrt{3}).$$

$n=16$:

$$k^2=4(3\sqrt{2}-4), \qquad k^2=\frac{3\sqrt{2}+4}{8}.$$

17. *Modules de la première espèce et de la seconde catégorie d'un degré pair.* — Dans ce cas a est impair, b et c sont de la même parité. Le nombre δ étant par conséquent impair, l'équation modulaire principale appartient au cas II; en remplaçant dans les équations (40) les indices π par o, elle est définie par les relations

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \,.\, 2\omega &= \quad \delta \,.\, 2\omega_0, \\ \varepsilon_0 \,.\, \ \omega' &= -t \,.\, 2\omega_0 + n'\omega'_0. \end{aligned}$$

Les équations (24) deviennent

$$(45) \qquad \begin{cases} b = r_1\delta, & a = s_1\delta, \\ -c = -r_1 t + r'_1 n', & -b = -s_1 t + s'_1 n'; \end{cases}$$

on voit que les deux premières déterminent complètement les nombres r_1, s_1, δ, en se rappelant que δ désigne le plus grand commun diviseur de a et de b, et que son signe est déterminé par la congruence $\delta \equiv 1 \pmod 4$. Ensuite on choisit les nombres r'_1 et s'_1 de manière à vérifier la relation $r_1 s'_1 - r'_1 s_1 = 1$; or, s_1 étant impair, on peut choisir s'_1 pair. En éliminant n' des deux dernières équations, on a

$$(46) \qquad t = cs'_1 - br'_1,$$

ce qui achève la résolution du système (45). En effet, l'équation $ac-b^2=n$ donne

$$(47) \qquad n' = cs_1 - br_1,$$

et évidemment les deux dernières des équations (45) sont des consé-

quences de (46) et (47). De plus on tire de la dernière équation (45)

$$t \equiv s_1 b \equiv ab \pmod 4.$$

Cela posé, le Tableau des transformations linéaires donne

$$(48) \quad \begin{cases} k_0 = \left(\dfrac{1 - i^{ab}\sqrt{k}}{1 + i^{ab}\sqrt{k}}\right)^2, \\ \varepsilon' = \dfrac{2\, i^a}{(1 + i^{ab}\sqrt{k})^2}, \qquad \varepsilon_0 = (-1)^{\frac{a-1}{2}} \frac{1}{2}\sqrt{n}\,(1 + i^{ab}\sqrt{k})^2, \end{cases}$$

$$\lambda(i\sqrt{n}\,\theta) = \frac{2\varepsilon' Y}{1 + \Delta Y - k_0 Y^2}.$$

En substituant la valeur de k_0 dans l'équation modulaire répondant à $t \equiv ab \pmod 4$, on obtient une équation de la forme

$$f(i^{ab}\sqrt{k}) = 0,$$

f dénotant un polynôme à coefficients entiers, dont le premier est égal à 1. Ici, comme dans les deux numéros suivants, on a le cas où chaque racine de l'équation modulaire principale répond à deux ou à quatre racines de l'équation $F(\xi, \eta) = 0$ du n° **8**; mais, comme nous l'avons fait remarquer, cette circonstance n'infirme pas les conclusions de ce numéro. Puisqu'on n'a qu'une seule équation en k^2, il suffira de chercher les racines de l'équation

$$f(\sqrt{k}) = 0.$$

Au moyen de la relation

$$\zeta_0 = \frac{t + \delta\zeta}{n'},$$

on vérifie sans peine qu'elle admet la racine $\sqrt{k} = -1$, quand $\pi = 2$, et la racine $\sqrt{k} = 1$, quand $\pi > 3$, et qu'elle n'est pas satisfaite par $\sqrt{k} = 0$, ni par $\sqrt{k} = \pm i$. De plus, on verra aisément que les autres racines étrangères dont il faut débarrasser l'équation, toutes des racines au moins doubles, sont les racines carrées des modules de la première espèce et de la seconde catégorie dont le degré n_1 vérifie la relation

$n = x^2 + y^2 n_1$, x et y étant premiers entre eux, et x pair. On remarquera cependant que, lorsque x n'est pas divisible par 4, il faut prendre les racines carrées des modules correspondants avec le signe opposé à celui qu'on obtient en les calculant d'après la règle qui vient d'être donnée. Dans l'équation finale

$$F(\sqrt{k}) = 0,$$

le premier coefficient est évidemment 1 ; en chassant $\sqrt{k}$ et les puissances impaires de k, on a une équation en k^2, nécessairement réciproque, dont par conséquent et le premier et le dernier coefficient sont égaux à l'unité. Remarquons enfin que, puisque deux quelconques des quatre équations $F(\pm\sqrt{k}) = 0$, $F(\pm i\sqrt{k}) = 0$ ne peuvent avoir des racines communes, on a

$$i^{ab}\sqrt{k} = \psi(k^2),$$

ψ dénotant une fonction rationnelle à coefficients entiers, identiquement la même dans tous les cas appartenant au même degré.

Exemples. — Pour $n = 2$, on a

$$\frac{2\sqrt{k}}{1+k} = \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2$$

ou bien

$$k^2 - 4k\sqrt{k} - 2k - 4\sqrt{k} + 1 = 0,$$

ce qui donne

$$\sqrt{k} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}.$$

$n = 4$. — L'équation modulaire est

$$k_0^2(1+\sqrt{k})^4 = 8\sqrt{k}(1+k);$$

en y faisant

$$k_0^2 = \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^4$$

et supprimant la racine quadruple $\sqrt{k} = -1$, on trouve

$$k^2 - 12k\sqrt{k} + 6k - 12\sqrt{k} + 1 = 0,$$

d'où

$$\sqrt{k} = 3 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{4 + 3\sqrt{2}} = -\frac{1 + \sqrt[4]{2}}{1 - \sqrt[4]{2}}.$$

18. *Modules de la seconde espèce et de la première catégorie.* — On peut réunir les deux systèmes d'équations (9) à un seul, en écrivant

$$(49)\qquad \begin{cases} \varepsilon . 2\omega = \quad \beta . 2\omega + a\,\omega', \\ \varepsilon . \quad \omega' = -c . 2\omega - \beta'\omega', \\ \varepsilon = \dfrac{\beta - \beta' + i\sqrt{4n - 1}}{2}, \end{cases}$$

où $\beta + \beta' = 2b + 1$, $\beta - \beta' = \pm 1$, $n = ac - \beta\beta'$, et où, par conséquent, on peut à volonté supposer β pair ou impair. Pour la première catégorie a est pair et nous supposons β impair. Par suite, il faut employer les équations modulaires du cas II; on a, comme au numéro précédent,

$$(50)\qquad \begin{cases} \beta = r_1 \delta, \qquad a = s_1 \delta, \\ -c = -r_1 t + r'_1 n', \qquad -\beta' = -s_1 t + s'_1 n', \end{cases}$$

où $\delta \equiv 1 \pmod 4$, s_1 est pair, r_1 et s'_1 impairs. On peut profiter de l'indétermination de l'équation $r_1 s'_1 - r'_1 s_1 = 1$ pour rendre r'_1 pair; le nombre t est déterminé par l'équation

$$t = cs'_1 - \beta' r'_1,$$

et l'on a

$$t \equiv cr_1 \equiv \beta c \pmod 4.$$

Si maintenant a est divisible par 4, on a

$$k_0 = k, \qquad \varepsilon_0 = (-1)^{\frac{\beta - 1}{2}} \frac{\beta - \beta' + i\sqrt{4n - 1}}{2}$$

$$\lambda\left(\frac{\beta - \beta' + i\sqrt{4n - 1}}{2}\,0\right) = (-1)^{\frac{\beta - 1}{2}}\,Y.$$

et, si $a \equiv 2 \pmod 4$,

$$k_0 = \frac{1}{k}, \qquad \varepsilon_0 = (-1)^{\frac{\beta-1}{2}} k \frac{\beta - \beta' + i\sqrt{4n-1}}{2},$$

$$\lambda\left(\frac{\beta - \beta' + i\sqrt{4n-1}}{2}\theta\right) = (-1)^{\frac{\beta-1}{2}} \frac{1}{k} Y.$$

Les valeurs de k_0 doivent être substituées dans l'équation modulaire en $\sqrt{k}$ et en k_0 répondant à $t \equiv \beta c \pmod 4$; on obtient ainsi deux équations à coefficients entiers

$$f(i^{\beta c}\sqrt{k}) = 0, \qquad f'(i^{\beta c}\sqrt{k}) = 0,$$

dont la première a lieu si $a \equiv 0$, l'autre si $a \equiv 2 \pmod 4$; dans la première le coefficient de la plus haute puissance de $i^{\beta c}\sqrt{k}$ est 1, le dernier coefficient est une puissance de 2; dans la seconde équation l'inverse a lieu.

Il suffira de chercher les racines des équations

$$f(\sqrt{k}) = 0, \qquad f'(\sqrt{k}) = 0,$$

répondant à $c \equiv 0 \pmod 4$. Au moyen de la relation $\zeta_0 = \frac{t + \delta\zeta}{n'}$, on trouve que les deux équations admettent la racine $\sqrt{k} = 1$, et qu'en outre la première a la racine $\sqrt{k} = 0$, mais qu'aucune d'elles n'est satisfaite par $\sqrt{k} = -1$, ni par $\sqrt{k} = \pm i$. De la manière ordinaire on démontre que les autres racines sont les racines carrées des modules de la seconde espèce et de la première catégorie, dont le degré n_1 satisfait à la relation

$$4n = x^2 + y^2(4n_1 - 1),$$

x et y étant premiers entre eux et impairs, et que la multiplicité de chacune d'elles est égale à la quatrième partie du nombre des solutions de cette équation; on voit en même temps qu'il faut supposer pour chacun de ces modules le coefficient c_1 divisible par 4, et qu'il faut prendre $a_1 \equiv 0 \pmod 4$ pour la première équation, $a_1 \equiv 2$ pour la seconde.

En supprimant les racines étrangères, on a deux équations

$$F(\sqrt{k}) = 0, \qquad F'(\sqrt{k}) = 0;$$

si l'on ne fait pas d'hypothèse sur la valeur de c, on a évidemment

$$F(i^{\beta c}\sqrt{k}) = 0, \qquad F'(i^{\beta c}\sqrt{k}) = 0,$$

c'est-à-dire qu'il y a quatre équations pour $a \equiv 0 \pmod 4$ et autant pour $a \equiv 2$, mais qu'en chassant $\sqrt{k}$ et les puissances impaires de k, on n'a que deux équations finales

$$F_1(k^2) = 0, \qquad F'_1(k^2) = 0.$$

Dans la première de ces équations le premier coefficient est 1, le dernier une puissance de 2, l'inverse ayant lieu pour la seconde. Au moyen des transformations linéaires, on démontre facilement que, $\sqrt{k}$ satisfaisant à l'équation $F(\sqrt{k}) = 0$, $\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}$ lui satisfera aussi, et que $\frac{1}{\sqrt{k}}$, $\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}$ seront racines de l'équation $F'(\sqrt{k}) = 0$.

Évidemment $(-1)^c k$ s'exprime en fonction rationnelle de k^2.

Exemples. — En faisant

$$k = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},$$

on a

$$\sqrt{k}(\sqrt{k}-1)(k+\sqrt{k}+2) = 0,$$

où le dernier facteur donne la première équation relative à $n = 2$; on en tire

$$\sqrt{k} = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}.$$

Faisant, au contraire,

$$\frac{1}{k} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},$$

on a

$$(\sqrt{k}-1)(2k+\sqrt{k}+1) = 0;$$

d'où

$$\sqrt{k} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}.$$

$n = 4$. — L'équation modulaire est

$$k_0^2(1 + \sqrt{k})^4 = 8\sqrt{k}(1 + k);$$

en y faisant $k_0 = k$, on trouve

$$\sqrt{k}(\sqrt{k} - 1)(k + \sqrt{k} + 2)(k^2 + 4k\sqrt{k} + 5k + 2\sqrt{k} + 4) = 0;$$

donc, pour $n = 4$, la première équation est

$$k^2 + 4k\sqrt{k} + 5k + 2\sqrt{k} + 4 = 0.$$

Pour en faciliter la résolution, on peut remarquer que, $\sqrt{k}$ étant une racine, $\frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}$ en est une autre, de sorte que l'équation se décompose en deux facteurs de la forme $k - \alpha\sqrt{k} - (\alpha - 1) = 0$; on trouve ainsi $\alpha = -2 - \sqrt{5}$,

$$\sqrt{k} = \frac{2 + \sqrt{5} + i\sqrt{3}}{2}.$$

En faisant $k_0 = \frac{1}{k}$, on a

$$(\sqrt{k} - 1)(2k + \sqrt{k} + 1)(4k^2 + 2k\sqrt{k} + 5k + 4\sqrt{k} + 1) = 0,$$

où le dernier facteur donne la seconde équation; on trouve

$$\sqrt{k} = \frac{-1 + \sqrt{5} + 3i\sqrt{3} + i\sqrt{15}}{8}.$$

19. *Modules de la seconde espèce et de la seconde catégorie d'un degré pair.* — Dans les équations (49), (50) le nombre a est impair, de sorte qu'il faut employer les équations modulaires du cas II; de plus, s_1 étant impair, nous pouvons rendre $s'_1 \equiv 0 \pmod 4$. On a donc

$$\beta \equiv r_1, \qquad a \equiv s_1, \qquad t \equiv s_1\beta' \equiv a\beta' \pmod 4.$$

et, par suite, le Tableau des transformations linéaires donne

$$\sqrt{k_0} = \frac{1 - i^{\alpha\beta}\sqrt{k}}{1 + i^{\alpha\beta}\sqrt{k}},$$

$$\varepsilon' = \frac{2i^{\alpha}}{(1 + i^{\alpha\beta}\sqrt{k})^2},$$

$$\varepsilon_0 = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\tfrac{1}{4}\left[(\beta'-\beta)i + \sqrt{4n-1}\right](1 + i^{\alpha\beta}\sqrt{k})^2,$$

$$\lambda\left(\frac{\beta - \beta' + i\sqrt{4n-1}}{2}\,0\right) = \frac{2\varepsilon' Y}{1 + \Delta(Y) - k_0 Y^2}.$$

En dénotant par $f(k_0, \sqrt{k}) = 0$ l'équation modulaire du cas II qui répond à $t \equiv 0 \pmod 4$, on a

$$(51) \qquad f\left[\left(\frac{1 - i^{\alpha\beta}\sqrt{k}}{1 + i^{\alpha\beta}\sqrt{k}}\right)^2, i^{\alpha\beta'}\sqrt{k}\right] = 0.$$

En cherchant les modules singuliers qui satisfont à cette équation, on voit facilement qu'ils sont tous de la seconde espèce; par conséquent, les nombres R_1, S_1, R'_1, S'_1 sont déterminés par les équations

$$\frac{x+y}{2} + yb_1 = R_1\delta,$$

$$ya_1 = S_1\delta,$$

$$-yc_1 = -R_1 t + R'_1 n',$$

$$\frac{x-y}{2} - yb_1 = -S_1 t + S'_1 n'.$$

S_1 étant nécessairement impair, nous pouvons toujours supposer $S'_1 \equiv 0 \pmod 4$; d'où

$$\left.\begin{aligned} S_1 &\equiv ya_1 \\ t &\equiv -a_1\frac{xy-1}{2} + a_1 b_1 \\ R_1 S_1 &\equiv a_1\frac{xy+1}{2} + a_1 b_1 \end{aligned}\right\} \pmod 4.$$

Donc les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\sqrt{l}$ soit une

racine de l'équation (51) sont

$$a_1\frac{xy+1}{2}+a_1b_1\equiv a\beta,\qquad -a_1\frac{xy-1}{2}+a_1b_1\equiv a\beta'\qquad (\text{mod}\,4);$$

d'où l'on tire

$$a_1xy\equiv a(\beta-\beta'),\qquad b_1\equiv a\beta a_1-\frac{xy+1}{2}$$

et

$$a_1(2b_1+1)=a_1(\beta_1+\beta'_1)\equiv a(\beta+\beta')\qquad (\text{mod}\,4).$$

Considérons spécialement l'équation

$$(52)\qquad f\left[\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2, i\sqrt{k}\right]=0,$$

qui, comme il est facile de le voir, donne toutes les valeurs de k^2; on doit faire $\beta\equiv 0$, $\beta'\equiv a$, et l'on a, par conséquent,

$$xy\equiv -a_1,\qquad a_1(\beta_1+\beta'_1)\equiv 1\qquad (\text{mod}\,4),$$
$$b_1\equiv -\frac{xy+1}{2},\qquad b_1+1\equiv -\frac{xy-1}{2}.$$

Nous pouvons maintenant faire $\beta_1=b_1$ ou $\beta_1=b_1+1$ à volonté; supposons β_1 pair, et remarquons que, si β_1 est divisible par 4, on aura $a_1\beta'_1\equiv 1$; si, au contraire, $\beta_1\equiv 2\,(\text{mod}\,4)$, on aura $a_1\beta'_1\equiv -1$. Il s'ensuit que l'équation (52) est satisfaite par les racines carrées des modules de la seconde espèce et de la seconde catégorie dont le degré n_1, nécessairement pair, vérifie l'équation

$$(53)\qquad 4n=x^2+y^2(4n_1-1),$$

x et y étant impairs et premiers entre eux, et lesquelles satisfont à une équation de la forme (52) correspondant au degré n_1, pourvu qu'on ait soin de changer le signe de $\sqrt{l}$ toutes les fois que $\frac{xy\pm 1}{2}$ est pair, sans être divisible par 4. Puisque, le signe de y étant choisi, celui de x est déterminé par la congruence $xy\equiv -a_1$, la multiplicité de la racine $\sqrt{l}$

est égale au quart du nombre des solutions de l'équation (53). Outre ces racines, l'équation (52) admet encore les suivantes :

$$\text{si } \frac{n}{2} \text{ est impair,} \qquad \sqrt{k} = -1, \qquad \sqrt{k} = i,$$

$$\text{si } \frac{n}{2} \text{ est pair,} \qquad \sqrt{k} = 1, \qquad \sqrt{k} = -i.$$

Ce qui précède suffit pour montrer comment on peut débarrasser l'équation des racines étrangères et obtenir ainsi une équation $F(\sqrt{k}, i) = 0$ qui n'est satisfaite que par les modules du degré n.

En considérant l'équation

$$f\left[\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2, -i\sqrt{k}\right] = 0,$$

qu'on obtient en faisant $\beta \equiv 0$, $\beta' \equiv -a$, on voit qu'elle donne les mêmes valeurs de k^2 que l'équation (52); en supprimant les racines étrangères, on a évidemment $F(\sqrt{k}, -i) = 0$. Il s'ensuit que, en chassant des équations $F(\sqrt{k}, \pm i) = 0$, le radical $\sqrt{k}$ et les puissances impaires de k, on obtient une seule équation en k^2

$$F_1(k^2) = 0,$$

dont les coefficients sont, par conséquent, des entiers. Cette équation est réciproque, et, d'après ce qui a été dit au n° **15**, son premier et son dernier coefficient sont 1.

On voit facilement que, si $\sqrt{k} = \varkappa$ satisfait à l'équation $F(\sqrt{k}, i) = 0$, la valeur $\sqrt{k} = i\varkappa$ satisfait à l'équation $F(\sqrt{k}, -i) = 0$, de sorte qu'on a $F(\sqrt{k}, i) = F(i\sqrt{k}, -i)$; on en conclut que le polynôme $F(\sqrt{k}, i)$ a la forme suivante

$$F(\sqrt{k}, i) = \varphi(k^2) + (1-i)k\sqrt{k}\,\varphi_1(k^2) + ik\,\varphi_2(k^2) + (1+i)\sqrt{k}\,\varphi_3(k^2),$$

φ, φ_1, φ_2, φ_3 dénotant des polynômes à coefficients entiers. De plus, puisque, des quatre équations $F(\pm\sqrt{k}, \pm i) = 0$, deux n'ont pas de ra-

cines communes, on voit que $(1+i)\sqrt{k}$ s'exprime en fonction rationnelle de k^2. Généralement, en ne faisant aucune supposition relative à β et à β', on trouve

$$F\left[i^{a\beta}\sqrt{k},\, i^{a(\beta'-\beta)}\right] = 0,$$

et l'on a une équation de la forme

$$i^{a\beta}[1 + i^{a(\beta'-\beta)}]\sqrt{k} = \psi(k^2),$$

$\psi(k^2)$ étant une fonction rationnelle, la même pour toutes les racines de l'équation $F_1(k^2) = 0$.

En faisant, par exemple, $n = 2$, on a

$$\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2 = \frac{2i\sqrt{k}}{1-k};$$

d'où

$$(\sqrt{k}+1)(\sqrt{k}-i)\left[k - 3(1-i)\sqrt{k} - i\right] = 0:$$

le dernier facteur donne

$$\sqrt{k} = \frac{1-i}{2}(3+\sqrt{7}), \qquad k^2 = -\tfrac{1}{4}(3+\sqrt{7})^4.$$

En faisant $n = 4$, on obtient

$$\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^4 = \frac{8i\sqrt{k}(1-k)}{(1+i\sqrt{k})^4}$$

ou bien

$$(\sqrt{k}-1)(\sqrt{k}+i)\left[k + 3(1-i)\sqrt{k} - i\right]$$
$$\times\left[k^2 - 6(1-i)k\sqrt{k} + 20ik + 6(1+i)\sqrt{k} - 1\right] = 0,$$

où le dernier facteur donne

$$\sqrt{k} = \frac{1-i}{2}(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5}), \qquad k^2 = -\tfrac{1}{4}(2+\sqrt{3})^4(\sqrt{3}+\sqrt{5})^4.$$

20. Si, dans l'équation modulaire Ib appartenant au degré $4n$, on

fait $k_0^2 = k^2$, on obtient une équation, $F(k^2) = 0$, qui, comme on le démontre aisément, est satisfaite par les modules de la première espèce et de la première catégorie dont le degré n_1 vérifie la condition

$$4n = x^2 + y^2 n_1,$$

x et y étant impairs et premiers entre eux; la multiplicité de chacune de ces racines est égale au quart du nombre des solutions de l'équation de condition. En outre, elle n'admet que la racine $k^2 = 0$, et seulement si n est pair. Supposons que n soit impair, et soit $f(k_0^2, k^2) = 0$ l'équation modulaire appartenant au degré n, N le degré de cette équation; l'équation modulaire Ia correspondant au degré $4n$ est $f(k_0'^2, k^2) = 0$ (n° **15**), et, par conséquent, l'équation Ib est $f\left(k_0'^2, \frac{1}{k^2}\right) = 0$. Donc on a

$$F(k^2) = k^{2N} f\left(k'^2, \frac{1}{k^2}\right) = 0.$$

Dans cette équation, le premier et le dernier coefficient sont égaux à 1, propriété qui est conservée, quand on supprime les racines appartenant aux degrés moindres que $4n - 1$. Cela justifie l'assertion faite au n° **11** sur l'équation des modules de la première espèce et de la première catégorie dont le degré est de la forme $8h + 3$.

Au fond, la règle qui vient d'être démontrée est la même que la troisième règle de M. Hermite (*Théor. d'équat. mod.*, p. 44, 45); on peut démontrer les autres par des considérations analogues.

21. Nous supposerons dès à présent le rapport des périodes défini par une équation de la forme

$$a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0,$$

même pour les modules de la seconde espèce, de sorte que, pour ces modules, a et c sont pairs, b impair; nous désignerons par $-$ D le déterminant du module, en faisant

$$D = ac - b^2.$$

Cela posé, examinons de plus près les formules de multiplication

complexe. Pour tous les modules de la première espèce et de la première catégorie et pour tous les modules de la seconde espèce, on a des équations de la forme

$$\lambda(i\sqrt{D}\theta) = AY;$$

pour ceux de la seconde espèce et de la première catégorie, on a, en outre,

$$\lambda\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\theta\right) = AY,$$

où A désigne une constante, Y ayant la même signification que dans les numéros précédents. En faisant converger θ vers zéro, on en tire respectivement

$$i\sqrt{D} = A\varepsilon_0, \qquad \frac{1+i\sqrt{D}}{2} = A\varepsilon_0;$$

d'où

$$(54)\qquad \lambda(i\sqrt{D}\theta) = i\sqrt{D}\frac{Y}{\varepsilon_0}, \qquad \lambda\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\theta\right) = \frac{1+i\sqrt{D}}{2}\,\frac{Y}{\varepsilon_0}.$$

Pour la seconde catégorie de la première espèce, on trouve, en remettant la valeur de k_0,

$$(55)\qquad \lambda(i\sqrt{D}\theta) = \frac{2i\sqrt{D}(1+i^{ab}\sqrt{k})^2\dfrac{Y}{\varepsilon_0}}{(1+i^{ab}\sqrt{k})^2[1+\Delta(Y)]-(1-i^{ab}\sqrt{k})^2Y^2},$$

et, pour la seconde catégorie de la seconde espèce, en ayant égard à la dénomination changée,

$$(56)\quad \lambda\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\theta\right) = \frac{(1+i\sqrt{D})\left(1+i^{\frac{ab+1}{4}}\sqrt{k}\right)^2\dfrac{Y}{\varepsilon_0}}{\left(1+i^{\frac{ab+1}{4}}\sqrt{k}\right)^2[1+\Delta(Y)]-\left(1-i^{\frac{ab+1}{4}}\sqrt{k}\right)^2Y^2}.$$

La fonction Y a des formes différentes dans les différents cas. En désignant par F et F_1 des fonctions rationnelles, on a, si la transformation appartient à un degré impair,

$$Y = \varepsilon_0 F[\lambda(\theta)], \qquad \Delta(Y) = \mu(\theta)\nu(\theta)F_1[\lambda(\theta)].$$

Cela a encore lieu si le degré est pair, et que la transformation appar-

tienne au second cas; mais, si elle appartient au premier cas, on a, si le degré est impairement pair,

$$Y = \frac{\varepsilon_0 F[\lambda(0)]}{\mu(0)\nu(0)}, \qquad \Delta(Y) = F_1[\lambda(0)],$$

et, si le degré est divisible par 4,

$$Y = \varepsilon_0 \mu(0)\nu(0) F[\lambda(0)], \qquad \Delta(Y) = F_1[\lambda(0)].$$

Tant qu'on regarde le module primitif k comme une quantité indéterminée, les coefficients de la fonction Y, à l'exception du multiplicateur ε_0, s'expriment toujours ou en fonction entière de k^2 et de k_0^2 à coefficients entiers, ou bien, s'il s'agit d'une transformation d'un degré impairement pair et appartenant au premier cas, en fonction entière de k et de k_0^2; la même chose a lieu à l'égard de ε_0^2 et des coefficients de $F_1[\lambda(0)]$. Cette propriété des transformations principales est fondée sur la circonstance que k_0^2 et les coefficients dont il est question sont des fonctions symétriques des quantités $\lambda^2\left(\frac{p\Omega}{n}\right)$ ou $\lambda^2\left[\frac{(2p+1)\Omega}{2n}\right]$, et que k_0^2 a autant de valeurs différentes que le permet la nature d'une fonction de cette forme; par conséquent, elle ne peut faire défaut pour des modules spéciaux que si k_0^2 est racine double ou multiple de l'équation modulaire correspondante. Or, d'après ce qui a été dit au n° **8**, il est facile de voir que, si l'on fait k égal à un module singulier appartenant au déterminant $-D$, k_0^2 est effectivement racine simple de l'équation modulaire principale; donc la propriété générale des transformations dont nous parlions ne cesse pas d'avoir lieu dans notre cas spécial. En l'appliquant aux équations (54), on a ou $k_0^2 = k^2$ ou $k_0^2 = \frac{1}{k^2}$, et, par suite, les coefficients de $F[\lambda(0)]$, $F_1[\lambda(0)]$ sont rationnels en k^2; les formules qui appartiennent aux degrés impairement pairs ne font pas exception, puisque, dans ces cas, k s'exprime rationnellement en k^2 (n^{os} **16, 18**). Quand les équations (55) ou (56) ont lieu, on a respectivement (n^{os} **13, 14, 17, 19**)

$$k_0^2 = \left(\frac{1 - i^{ab}\sqrt{k}}{1 + i^{ab}\sqrt{k}}\right)^4, \qquad k_0^2 = \left(\frac{1 - i^{\frac{a(b+1)}{4}}\sqrt{k}}{1 + i^{\frac{a(b+1)}{4}}\sqrt{k}}\right)^4,$$

et, de plus, on a vu que, dans le cas de l'équation (55), $i^{ab}\sqrt{k}$ s'exprime rationnellement en k^2, et que, dans celui de l'équation (56), $i^{\frac{a(b+1)}{4}}\sqrt{k}$ s'exprime rationnellement en k^2 et en $i^{\frac{a}{2}}$.

De ce qui précède il suit qu'on a, pour tout module du déterminant — D, une équation de la forme suivante

$$(57) \qquad \lambda(i\sqrt{D}\theta) = \frac{i\sqrt{D}\,\psi[\lambda(\theta), k^2]}{\psi_1[\lambda(\theta), k^2] + \mu(\theta)\nu(\theta)\psi_2[\lambda(\theta), k^2]},$$

et qu'on a, en outre, pour les modules de la seconde espèce s'ils sont de la première catégorie,

$$(58) \qquad \lambda\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\theta\right) = \frac{1+i\sqrt{D}}{2}\,\frac{\psi[\lambda(\theta), k^2]}{\psi_1[\lambda(\theta), k^2]},$$

et, s'ils sont de la seconde catégorie,

$$(59) \quad \lambda\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\theta\right) = \frac{1+i\sqrt{D}}{2}\,\frac{\psi\left[\lambda(\theta), k^2, i^{\frac{a}{2}}\right]}{\psi_1\left[\lambda(\theta), k^2, i^{\frac{a}{2}}\right] + \mu(\theta)\nu(\theta)\psi_2\left[\lambda(\theta), k^2, i^{\frac{a}{2}}\right]},$$

ψ, ψ_1, ψ_2 dénotant des polynômes à coefficients entiers qu'on peut supposer dépourvus de diviseurs communs. Pour les modules de la première catégorie, $\psi_2[\lambda(\theta), k^2] = 0$ si D est impair; si D est pair, on a $\psi_1[\lambda(\theta), k^2] = 0$.

L'introduction de l'irrationnelle $i\sqrt{D}$ dans les seconds membres de ces formules a pour effet de faire disparaître le double signe qui, dans les numéros précédents, affecte partout les expressions de $\lambda(i\sqrt{D}\theta)$, $\lambda\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\theta\right)$; par là, les formules (57), (58) sont devenues indépendantes des coefficients a, b, c de l'équation en ζ, de sorte qu'elles sont identiquement les mêmes pour tous les modules qui satisfont à la même équation en k^2. Dans l'équation (59), une ambiguïté subsiste encore; mais, comme on le verra au numéro suivant, elle peut être levée au moyen d'une équation de la forme

$$i^{\frac{a}{2}} = i\sqrt{D}\,\chi(k^2).$$

Par différentiation on tire de l'équation (57) une expression de

$$\mu(i\sqrt{D}\theta)\nu(i\sqrt{D}\theta);$$

au moyen des théorèmes d'addition et de multiplication on peut ensuite déduire l'expression de $\lambda[(r+si\sqrt{D})\theta]$, qui évidemment peut être réduite à la forme

$$\lambda[(r+si\sqrt{D})\theta] = \frac{P}{Q+\mu(\theta)\nu(\theta)R},$$

P, Q et R étant des fonctions entières de $\lambda(\theta)$, k^2, $i\sqrt{D}$ à coefficients entiers, et qu'on peut supposer sans diviseurs communs. Pour les modules de la seconde espèce, on aura une expression semblable de

$$\lambda\left(\frac{r+si\sqrt{D}}{2}\theta\right),$$

r et s étant impairs.

22. Les équations algébriques qui déterminent les carrés des modules singuliers se décomposent toutes en deux équations partielles par l'adjonction ou de $\sqrt{D}$ ou de $i\sqrt{D}$, à moins que D ne soit un carré parfait. Cela découle immédiatement des relations qui ont lieu entre $i\sqrt{D}$ et le multiplicateur ε_0 de la transformation principale employée.

Soit $\Phi(k^2)=0$ une de ces équations, et supposons d'abord qu'elle appartienne à la première catégorie, le déterminant étant de la forme $-(4h+1)$. On a, dans ce cas (n° **10**), $\varepsilon_0 = i^b k\sqrt{D}$; or, ε_0 s'exprimant en fonction rationnelle de k^2, on peut faire

$$i^b k\sqrt{D} = \varphi(k^2);$$

de plus, on a

$$i^{bc}k = \psi(k^2);$$

d'où l'on tire, en se rappelant que b et c sont impairs,

$$\varphi(k^2) - (-1)^{\frac{c-1}{2}}\sqrt{D}\,\psi(k^2) = 0.$$

Les coefficients des fonctions rationnelles φ et ψ étant des entiers, on en peut évidemment conclure que, si D n'est pas un carré parfait, l'équation $\Phi(k^2)=0$ se décompose par l'adjonction de $\sqrt{D}$ en deux autres du degré sous-double, et qu'un module satisfait à l'une ou l'autre de ces équations, suivant que $(-1)^{\frac{c-1}{2}}$ est égal à $+1$ ou à -1.

Pour les modules de la première catégorie d'un déterminant pair, on peut se borner aux équations (44), puisque, si $D\equiv 2 \pmod 4$, il n'y a qu'une seule équation en k^2, et que, si $D\equiv 0 \pmod 4$, l'une des deux équations a pour racines les réciproques de celles de l'autre, de sorte que la décomposition de la première équation entraîne celle de l'autre. On a donc

$$\varepsilon_0 = i^c\sqrt{D} = i\varphi(k^2)$$

ou bien

$$\varphi(k^2)-(-1)^{\frac{c-1}{2}}\sqrt{D}=0;$$

d'où l'on peut faire les mêmes conclusions que pour $D=4h+1$; seulement il faut se rappeler que, si $D\equiv 2 \pmod 4$, on a supposé b divisible par 4; si l'on veut se délivrer de cette restriction, il faut remplacer $(-1)^{\frac{c-1}{2}}$ par $(-1)^{\frac{c-b-1}{2}}$.

Pour tous les modules de la première espèce et de la seconde catégorie, on a (n^{os} **13, 17**) une équation de la forme

$$\varepsilon_0=(-1)^{\frac{a-1}{2}}\tfrac{1}{2}(1+i^{ab}\sqrt{k})^2\sqrt{D}=\varphi(k^2),$$

et l'on peut faire

$$\tfrac{1}{2}(1+i^{ab}\sqrt{k})^2=\psi(k^2),$$

donc

$$\varphi(k^2)-(-1)^{\frac{a-1}{2}}\sqrt{D}\,\psi(k^2)=0.$$

Donc, si D n'est pas un carré, l'équation $\Phi(k^2)=0$ se décompose par l'adjonction de $\sqrt{D}$ en deux équations partielles, un module donné satisfaisant à l'une ou à l'autre, suivant qu'on a $(-1)^{\frac{a-1}{2}}=+1$ ou $=-1$.

Pour la seconde catégorie de la seconde espèce, on a (n^{o} **12**), en

ayant égard au changement fait dans la signification des lettres a, b, c,

$$\varepsilon_0 = i^b k\sqrt{D} = \varphi(k^2);$$

de plus, on a (n^{os} **14**, **19**)

$$-2i^{\frac{a}{2}b+a}k = \psi(k^2);$$

d'où l'on tire, en remarquant que $\frac{a}{2}$ et b sont des nombres impairs,

$$\varphi(k^2) - \tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{a-2}{4}}\sqrt{D}\,\psi(k^2) = 0.$$

Il y a donc, encore dans ce cas, décomposition par $\sqrt{D}$, les modules se groupant suivant la valeur de $(-1)^{\frac{a-2}{4}}$. On trouve aussi

$$i^{\frac{a}{2}} = \frac{1}{2}i\sqrt{D}\frac{\psi(k^2)}{\varphi(k^2)},$$

ce qui justifie une assertion faite au numéro précédent.

En considérant, au contraire, les modules de la première catégorie d'un déterminant de la forme $4h-1$, on a, pour les deux espèces (n^{os} **11**, **12**),

$$\varepsilon_0 = (-1)^{\frac{b-1}{2}} i\sqrt{D} = \varphi(k^2);$$

donc l'équation $\Phi(k^2) = 0$ se décompose par l'adjonction de $i\sqrt{D}$, les racines se groupant suivant la valeur de $(-1)^{\frac{b-1}{2}}$.

Si l'on fait subir au module k, défini par l'équation

$$a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0,$$

la transformation linéaire $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, le module transformé sera $\frac{1}{k}$, et il répondra à l'équation

$$(a+4b+4c)\zeta^2 + 2(b+2c)\zeta + c = 0.$$

En considérant séparément les divers cas, on démontre aisément que, pour la première catégorie d'un déterminant de la forme $-(4h+1)$ et pour la seconde catégorie de la première espèce de tous les déterminants, k^2 et $\frac{1}{k^2}$ satisfont à la même équation partielle, tandis que, pour la première catégorie de la première espèce des déterminants $-(4h-1)$, $-(4h+2)$ et pour la seconde catégorie de la seconde espèce, k^2 satisfait à l'une des équations partielles, $\frac{1}{k^2}$ à l'autre. Quant à la première catégorie de la seconde espèce et à la première catégorie des déterminants divisibles par 4, on se rappelle qu'il y a déjà, avant la décomposition, deux équations, satisfaites l'une par k^2, l'autre par $\frac{1}{k^2}$.

IV. — Digression sur les formules d'Arithmétique de M. Kronecker.

23. Nous avons déjà donné deux exemples des formules d'Arithmétique qu'on peut tirer des considérations du paragraphe précédent, et évidemment toute équation modulaire donne lieu à un corollaire de cette espèce. Mais, si l'on veut obtenir ces formules sous la forme choisie par leur illustre auteur, il faut employer, non pas les équations modulaires irréductibles, mais les équations qui embrassent toutes les transformations définies par des équations de la forme

$$\varepsilon . 2\omega = n' . 2\omega_0,$$
$$\varepsilon . 2\omega' = -t . 2\omega_0 + n''\omega'_0,$$

d'un degré impair donné, ou toutes celles qu'on en déduit par une transformation principale du degré 2^π. On trouve par cette méthode, indiquée par M. Hermite dans son célèbre travail *Sur les équations modulaires* (p. 46, note), un certain nombre de formules qui se résument toutes par les formules I-VI de M. Kronecker (*Journal de Crelle*, t. 57, p. 249). Nous en déduirons quelques-unes, en commençant par celles qui correspondent à des transformations de degrés

impairs. Voici d'abord les notations dont nous ferons usage dans ce paragraphe : nous désignerons par

$G(n)$ le nombre des classes de formes quadratiques du déterminant $-n$, en faisant toutefois $G(0) = \frac{1}{4}$;
$F(n)$ le nombre des classes du déterminant $-n$ dont les coefficients extérieurs ne sont pas, les deux, pairs, en faisant $F(0) = 0$;
$\Phi(n)$ la somme des facteurs de n;
$\Psi(n)$ l'excès de la somme des facteurs de n qui surpassent $\sqrt{n}$, sur la somme de ceux qui sont moindres que $\sqrt{n}$;
$\varphi(n)$ la moitié du nombre des solutions de l'équation indéterminée $n = \xi^2 + 4\eta^2$;
$\varphi''(n)$ la moitié du nombre des solutions de l'équation $n = \xi^2 + 16\eta^2$;
$\psi(n)$ la moitié du nombre des solutions de l'équation $n = \xi^2 + 3\eta^2$.

Ce sont, à l'exception de φ'', les notations employées par M. Kronecker dans le travail cité. Les expressions $G(n)$, $F(n)$ satisfont aux égalités suivantes, où les termes qui se trouvent entre parenthèses ou entre doubles parenthèses doivent être omis, les premiers si n n'est pas un carré impair, les derniers si n n'est pas le triple d'un carré impair

$$F(4n) = 2F(n) - (1), \qquad G(4n) - F(4n) = G(n);$$

pour $n = 4h+1, 4h+2$, on a

$$G(n) = F(n),$$

pour $n = 8h-1$

$$G(n) = 2F(n),$$

et pour $n = 8h+3$

$$3G(n) = 4F(n) + ((2)).$$

24. Soit n un nombre impair, et désignons par

$$f(\sqrt{k}, \sqrt{k_0}) = 0$$

l'équation qui a lieu entre les racines carrées du module k et de son transformé k_0, la transformation étant du degré n et définie par des

équations de la forme

$$(60)\qquad \begin{cases} \varepsilon.2\omega = n'.2\omega_0, \\ \varepsilon\omega' = -t.2\omega_0 + n''\omega'_0, \end{cases}$$

où $n = n'n''$, $n' \equiv 1$, $t \equiv 0 \pmod 4$, et où t, n', n'' peuvent avoir un diviseur commun. On sait que le degré de cette équation, en $\sqrt{k_0}$ aussi bien qu'en $\sqrt{k}$, est égal à $\Phi(n)$. Pour les petites valeurs de $\sqrt{k}$ les valeurs de $\sqrt{k_0}$ se développent en séries convergentes, dont les premiers termes sont de la forme $e^{\frac{2\pi i t}{4n''}} 2^{\frac{n''-n,}{n''}} \sqrt{k}^{\frac{n'}{n''}}$; donc, pour les petites valeurs de x, l'équation $f(x, y) = 0$ peut être remplacée par la suivante

$$\Pi(y^{n''} - 2^{n''-n'} x^{n'}) = 0,$$

où n' doit être égalé à tous les diviseurs de n. On en conclut que le plus petit degré d'un terme du développement du polynôme $f(x, y)$ suivant les puissances de x et de y, est égal à $\Phi(n) - \Psi(n)$; c'est donc la multiplicité du point $x = y = 0$ de la courbe $f(x, y) = 0$. Dans le cas où n est un carré parfait nous devons quelquefois faire abstraction de la racine $y = x$, et, dans ce cas, il faudra diminuer d'une unité le nombre trouvé. L'équation ayant la propriété de ne pas être altérée quand on remplace x et y par $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, on a

$$f(x, y) = Cx^{\Phi(n)} y^{\Phi(n)} f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right),$$

d'où l'on conclut que l'ordre de la courbe est égal à $\Phi(n) + \Psi(n)$, nombre qui doit aussi être diminué d'une unité, si, dans les cas où n est un carré, on supprime la racine $x = y$. Enfin, nous aurons besoin de connaître les multiplicités des points

$$x = y = \pm 1, \qquad x = (-1)^{\frac{n-1}{2}} y = \pm i;$$

on les trouve égales à celle du point

$$x = y = 0.$$

On a vu, en effet, au n° **9**, que dans le cas des équations modulaires irréductibles l'équation $f(x, y) = 0$ peut s'écrire

$$f\left(\frac{i^r - x}{i^r + x}, \frac{i^{nr} - y}{i^{nr} + y}\right) = 0;$$

par conséquent la même équation a évidemment lieu dans le cas qui nous occupe. En développant suivant les puissances de $i^r - x$, $i^{nr} - y$, on voit qu'on a, pour les valeurs infiniment petites de ces quantités,

$$f(x, y) = \Pi[(i^{nr} - y)^{n''} - 2^{2(n''-n')}(i^r - x)^{n'}],$$

ce qui justifie notre assertion.

En supposant maintenant que le module k_0 se ramène à k par une transformation linéaire, on obtient une équation en $\sqrt{k}$, dont le degré peut être évalué au moyen des déterminations précédentes. Si cette équation admet les racines 0, ± 1 ou $\pm i$, on les supprimera, et l'on déterminera le degré de l'équation finale, satisfaite par les racines carrées des modules qui admettent une multiplication complexe du degré n et d'une forme spéciale, déterminée par la transformation linéaire employée. Or ces modules sont définis par les équations (27) et (28); seulement, dans notre cas, les nombres x et y ne sont pas assujettis à la condition d'être premiers entre eux.

Faisons dans les équations (27)

$$ya_1 = a, \qquad yb_1 = b, \qquad yc_1 = c, \qquad y^2 n_1 = ac - b^2 = \Delta,$$

on aura, en écrivant ω et ω' au lieu de ϖ et ϖ',

$$(61) \quad \begin{cases} (x + i\sqrt{\Delta}).2\omega = (x + b).2\omega + a\omega', \\ (x + i\sqrt{\Delta})\ \ \omega' = \qquad -c.2\omega + (x - b)\omega', \end{cases}$$
$$n = x^2 + \Delta.$$

En supposant x et y pairs, les équations (28) donnent un résultat de la même forme; mais, si x et y sont impairs, et qu'on fasse

$$2ya_1 = a, \qquad y(2b_1 + 1) = b,$$
$$2yc_1 = c, \qquad y^2(4n_1 - 1) = ac - b^2 = \Delta,$$

on a

$$(62)\quad \begin{cases} \dfrac{x+i\sqrt{\Delta}}{2}\cdot 2\omega = \left(\dfrac{x+b}{2}\right)\cdot 2\omega + \dfrac{a}{2}\,\omega', \\[2ex] \dfrac{x+i\sqrt{\Delta}}{2}\quad \omega' = \qquad -\dfrac{c}{2}\cdot 2\omega + \dfrac{x-b}{2}\,\omega', \end{cases}$$

$$4n = x^2 + \Delta,$$

où x est impair. Dans les deux cas le module est déterminé par l'équation

$$a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0.$$

Par là nous avons rapporté les modules aux déterminants $-\Delta$, au lieu de les rapporter à leurs degrés, et nous n'avons plus à distinguer les deux espèces de modules, mais seulement les multiplicateurs des formes $x + i\sqrt{\Delta}$ et $\frac{1}{2}(x + i\sqrt{\Delta})$, dont la dernière n'existe que si Δ est de la forme $4h - 1$ et x impair. On remarquera que dans les équations (61) le premier et le dernier coefficient $x + b$ et $x - b$ sont de la même parité, tandis que dans (62) les coefficients correspondants sont de parités contraires.

En faisant usage de (61) et (62), il arrive quelquefois qu'un même module est rapporté à plusieurs déterminants; mais on voit que sa multiplicité comme racine est intacte, en se rappelant que cette multiplicité est égale à la moitié du nombre des multiplicateurs avec lesquels le module satisfait à l'équation. Pour chaque déterminant auquel un module se trouve rapporté, il doit donc être compté comme racine simple si x est zéro, ou si x doit être pris avec un signe déterminé, comme racine double si $x^2 > 0$ et le signe de x est arbitraire.

En égalant le nombre des racines ainsi déterminé au degré connu de l'équation finale, on a une relation entre certains nombres de classes appartenant à une série de déterminants de la forme $-(n - x^2)$ ou de la forme $-(4n - x^2)$.

25. En faisant $\sqrt{k_0} = \sqrt{k}$, on obtient une équation en $\sqrt{k}$ du degré $\Phi(n) + \Psi(n)$, pourvu que n ne soit pas un carré parfait; dans ce cas il faut préalablement débarrasser l'équation modulaire du facteur $\sqrt{k_0} - \sqrt{k}$. Pour comprendre les deux cas dans une même formule, nous

écrirons entre crochets les termes qui doivent être omis, quand n n'est pas un carré; ainsi notre équation sera du degré $\Phi(n)+\Psi(n)-[1]$. Elle admet les racines o, ± 1 et, si n est de la forme $4h+1$, encore $\pm i$. Or, puisque dans les points

$$x=y=0, \qquad x=y=\pm 1, \qquad x=y=\pm i,$$

les directions des tangentes de la courbe $f(x,y)=0$ ne coïncident pas avec la droite $x=y$, la multiplicité de chacun de ces points, considéré comme point d'intersection de la courbe et de la droite, est égale à $\Phi(n)-\Psi(n)-[1]$. Donc, en supprimant ces racines, le degré de l'équation finale sera

$$6\Psi(n)-4\Phi(n)+[4]$$

si n est de la forme $4h+1$,

$$4\Psi(n)-2\Phi(n)$$

si n est de la forme $4h-1$.

Pour que la racine carrée d'un module singulier définie par les formules (61) ou (62) satisfasse à l'équation finale, il faut que l'une ou l'autre de ces multiplications complexes se déduise d'une transformation de la forme (60) suivie d'une transformation linéaire $\begin{pmatrix} r & s \\ r' & s' \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que les quatre coefficients de la multiplication complexe doivent être respectivement égaux aux nombres

$$rn', \quad sn', \quad -rt+r'n'', \quad -st+s'n''.$$

Dans notre cas on a

$$s \equiv r' \equiv 0 \pmod 4,$$

de sorte que rn' et $-st+s'n''$ sont impairs; donc il ne peut être question que des équations (61). On doit donc poser

$$x+b=rn', \qquad a=sn',$$
$$-c=-rt+r'n'', \qquad x-b=-st+s'n''.$$

Par suite $x+b$ et $x-b$ seront impairs, a et c divisibles par 4, et l'on aura

$$\Delta = ac - b^2 \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \equiv -1 \quad (\text{mod}\, 4).$$

Réciproquement on voit sans peine que ces conditions sont suffisantes.

Supposons d'abord que n soit de la forme $4h+1$; dans ce cas x sera nécessairement impair, b pair, puisque autrement

$$\Delta = n - x^2 \equiv 1 \quad (\text{mod}\, 4)$$

ce qui est impossible. Donc les modules peuvent correspondre à toute forme quadratique $(a,\ b,\ c)$ du déterminant

$$-[n-(2\xi+1)^2]$$

dans laquelle a et c sont divisibles par 4, b pair, en d'autres termes, à toute forme quadratique du déterminant

$$-\tfrac{1}{4}[n-(2\xi+1)^2]$$

dont les coefficients extérieurs sont pairs. Ainsi on a pour chaque valeurs de $(2\xi+1)^2$ un nombre de classes égal à

$$G\left[\frac{n-(2\xi+1)^2}{4}\right] - F\left[\frac{n-(2\xi+1)^2}{4}\right].$$

A l'exception des modules linéaires qui pourront se présenter, il y a pour chaque classe vingt-quatre valeurs de $\sqrt{k}$, toutes des racines doubles, puisque le signe de $2\xi+1$ est arbitraire. Mais nous conserverons au premier membre de l'équation le coefficient 48 devant tous les termes en ajoutant au second membre une correction C. On a donc

$$48\sum\left\{G\left[\frac{n-(2\xi+1)^2}{4}\right] - F\left[\frac{n-(2\xi+1)^2}{4}\right]\right\}$$
$$= 6\Psi(n) - 4\Phi(n) + |4| + C.$$

Déterminons maintenant la correction. Pour rencontrer des modules linéaires de la première espèce, il faut que $\frac{n-(2\xi+1)^2}{4}$ soit un carré

parfait; mais, puisque a et c doivent être pairs, ce carré sera lui-même pair : donc il faut que $n=(2\xi+1)^2+16\eta^2$. Si cette équation a lieu, on a les valeurs

$$\sqrt{k}=\pm\sqrt{\pm i},\qquad \sqrt{k}=\pm(\sqrt{2}\pm 1),\qquad \sqrt{k}=\pm i(\sqrt{2}\pm 1);$$

douze valeurs de $\sqrt{k}$ au lieu de vingt-quatre; ces racines étant doubles, la partie correspondante de la correction sera $12\varphi''(n)-[12]$. On a des modules linéaires de la seconde espèce si $n=(2\xi+1)^2+3(2\eta)^2$, et dans ce cas on a compté vingt-quatre valeurs de $\sqrt{k}$ au lieu de huit, ce qui amène une correction de $16\psi(n)-[16]$. Enfin un dernier terme de correction égal à $[12]$ est exigé par la circonstance qu'on a $G(0)=\frac{1}{4}$. Donc enfin on a

$$C=12\varphi''(n)+16\psi(n)-[16].$$

En substituant et divisant par 2, on a, pour $n=4h+1$,

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned} &24\sum G\left[\frac{n-(2\xi+1)^2}{4}\right]-24\sum F\left[\frac{n-(2\xi+1)^2}{4}\right]\\ &\qquad=3\Psi(n)-2\Phi(n)+6\varphi''(n)+8\psi(n)-[6],\end{aligned}\right.$$

où le nombre $2\xi+1$ doit prendre toutes les valeurs impaires et positives qui ne surpassent pas $\sqrt{n}$.

Si $n=4h-1$, x est pair, b impair, et par suite $\Delta=ac-b^2$ est de la forme $8h-1$. Il s'ensuit que x aura les valeurs $0, 4, 8, 12, \ldots$, si n est de la forme $8h-1$, mais les valeurs $2, 6, 10, \ldots$, si n est de la forme $8h+3$. Or, si dans une forme (a, b, c) du déterminant $-(8h-1)$, les coefficients a et c sont pairs, l'un d'eux sera divisible par 4, et b sera impair; de plus, il y aura toujours une forme de la même classe dans laquelle a et c sont, les deux, divisibles par 4; en effet, si l'on a, par exemple, $c\equiv 2 \pmod 4$, on déduira par la transformation linéaire $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ une nouvelle forme a_1, b_1, c_1 dans laquelle

$$a_1=a,$$
$$c_1=a+2b+c\equiv 0 \pmod 4.$$

Il y a donc, parmi les racines de l'équation, des valeurs de $\sqrt{k}$ appartenant à chaque classe de formes du déterminant $-\Delta$ dont les coefficients extérieurs sont pairs. Le nombre de ces classes est

$$G(\Delta)-F(\Delta)=F(\Delta).$$

Or, si $\sqrt{k}$ est une de ces racines, les autres racines appartenant à la même classe s'en déduisent par les transformations linéaires $\begin{pmatrix} r & s \\ r' & s' \end{pmatrix}$ qui conservent les congruences $a\equiv c\equiv 0 \pmod 4$; il faut pour cela que rr' et ss' soient pairs, c'est-à-dire que r' et s soient pairs, ce qui donne les racines

$$\pm\sqrt{k}, \quad \pm\frac{1}{\sqrt{k}},$$

ou que r et s' soient pairs, ce qui donne

$$\pm\frac{1\pm\sqrt{k}}{1\mp\sqrt{k}}.$$

Il y a donc huit racines par classe; elles sont racines doubles, excepté pour $x=0$. On ne rencontre pas de modules linéaires.

On est ainsi conduit aux deux formules suivantes :

Pour $n=8h-1$, on a

$$(64)\quad 4[F(n)+2F(n-4^2)+2F(n-8^2)+\ldots]=2\Psi(n)-\Phi(n),$$

et pour $n=8h+3$

$$(65)\quad \begin{cases} 4[2F(n-2^2)+2F(n-6^2)+2F(n-10^2)+\ldots] \\ \quad =2\Psi(n)-\Phi(n). \end{cases}$$

26. Faisons $\sqrt{k_1}=-\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot$ En substituant, on a une équation en $\sqrt{k}$ du degré $2\Phi(n)$, qui n'est satisfaite ni par $\sqrt{k}=0$, ni par $\sqrt{k}=\pm 1$. Mais, si $n=4h+1$, elle admet les racines $\sqrt{k}=\pm i$, et l'on voit comme précédemment que leur multiplicité est $\Phi(n)-\Psi(n)$; donc, en sup-

primant ces racines, on obtient, pour $n = 4h + 1$, une équation finale du degré $2\Psi(n)$.

En poursuivant l'analyse de la même manière qu'au numéro précédent, on est conduit aux trois équations suivantes :

Pour $n = 4h + 1$, on a

$$(66)\qquad 2[2F(n - 1^2) + 2F(n - 3^2) + 2F(n - 5^2) + \ldots] = \Psi(n);$$

pour $n = 8h - 1$,

$$(67)\qquad 4[2F(n - 2^2) + 2F(n - 6^2) + 2F(n - 10^2) + \ldots] = \Phi(n);$$

et, pour $n = 8h + 3$,

$$(68)\qquad 4[F(n) + 2F(n - 4^2) + 2F(n - 8^2) + \ldots] = \Phi(n).$$

De même, en faisant $\sqrt{k_1} = \frac{i}{\sqrt{k}}$, on trouve :

Pour $n = 4h + 1$,

$$(69)\qquad 2[F(n) + 2F(n - 2^2) + 2F(n - 4^2) + \ldots] = \Phi(n) + \varphi(n);$$

et, pour $n = 4h - 1$,

$$(70)\qquad 2[2F(n - 1^2) + 2F(n - 3^2) + 2F(n - 5^2) + \ldots] = \Phi(n).$$

Enfin, faisant dans l'équation modulaire

$$f(k, k_1) = 0,$$

qui a lieu entre k et k_1,

$$k_1 = \left(\frac{1 + i\sqrt{k}}{1 - i\sqrt{k}}\right)^2$$

et chassant le radical $\sqrt{k}$, on obtient une équation en k du degré $4\Phi(n)$, qui n'est satisfaite ni par $k = 0$, ni par $k = \pm 1$. En raisonnant sur cette équation, on ne rencontre que des multiplicateurs de la forme $\frac{1}{2}(x + i\sqrt{\Delta})$, et l'on obtient facilement

$$(71)\qquad F(4n - 1^2) + F(4n - 3^2) + F(4n - 5^2) + \ldots = \Phi(n).$$

27. Des équations (63) à (70) on déduit les formules IV, V, VI de M. Kronecker. En effet, les équations (64) à (70) donnent, pour toute valeur impaire de n,

$$(72)\quad \begin{cases} 2[F(n)+2F(n-1^2)+2F(n-2^2)+2F(n-3^2)+\ldots] \\ \quad =\Phi(n)+\Psi(n)+\varphi(n), \end{cases}$$

$$(73)\quad \begin{cases} 2[F(n)-2F(n-1^2)+2F(n-2^2)-2F(n-3^2)+\ldots] \\ \quad =(-1)^{\frac{n-1}{2}}[\Phi(n)-\Psi(n)]+\varphi(n), \end{cases}$$

c'est-à-dire les équations V et VI. Pour avoir l'équation IV, remarquons qu'au moyen de la formule $2F(\Delta)=F(4\Delta)+1$, où le dernier terme doit être omis si Δ n'est pas un carré impair, on trouve

$$24\sum F\left[\frac{n-(2\xi+1)^2}{4}\right]$$
$$=12\sum F[n-(2\xi+1)^2]+6\varphi(n)-6\varphi''(n);$$

donc, en vertu de l'équation (66), on a, pour $n=4h+1$,

$$24\sum F\left[\frac{n-(2\xi+1)^2}{4}\right]=3\Psi(n)+6\varphi(n)-6\varphi''(n)$$

et, en ajoutant cette équation à (63),

$$24\sum G\left[\frac{n-(2\xi+1)^2}{4}\right]=6\Psi(n)-2\Phi(n)+6\varphi(n)+8\psi(n)-[6].$$

Or l'équation (72) peut s'écrire de la manière suivante

$$2[G(n)+2G(n-1^2)+2G(n-2^2)+2G(n-3^2)+\ldots]$$
$$-4\sum G\frac{n-(2\xi+1)^2}{4}$$
$$=\Phi(n)+\Psi(n)+\varphi(n);$$

donc enfin

$$3[G(n)+2G(n-1^2)+2G(n-2^2)+2G(n-3^2)+\ldots]$$
$$=\Phi(n)+3\Psi(n)+3\varphi(n)+2\psi(n)-\left[\tfrac{3}{2}\right];$$

c'est là l'équation IV démontrée pour $n=4h+1$ [1]. Pour $n=h-1$, on la tire des formules (64), (65), (67), (68), (70), en y exprimant $F(\Delta)$ par $G(\Delta)$.

28. Pour avoir des formules dans lesquelles le nombre impair n est remplacé par $2n$, partons toujours de la transformation du degré n

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 2\omega &= \quad n'.2\omega_0,\\ \varepsilon_1 \omega' &= -\,t.2\omega_0 + n''\omega'_0,\end{aligned}$$

qui donne l'équation modulaire

$$f(k, k_0) = 0,$$

et faisons-y

$$\begin{aligned}\varepsilon'.2\omega_0 &= \quad 2\omega'_1, &\qquad \varepsilon''.2\omega_1 &= \quad \rho.2\omega + 4\sigma\,\omega',\\ \varepsilon'\omega'_0 &= -\,2\omega_1, &\qquad \varepsilon''\omega'_1 &= 2\rho'.2\omega + \quad \sigma'\omega'.\end{aligned}$$

$$\rho\sigma' - 8\rho'\sigma = 1,$$

ou bien

$$(74)\qquad \begin{cases}\varepsilon'\varepsilon''.2\omega_0 = \quad 4\rho'.2\omega + 2\sigma'\omega',\\ \varepsilon'\varepsilon'' \quad \omega'_0 = -\,\rho.2\omega - 4\sigma\,\omega',\end{cases}$$

ce qui donne

$$k = \frac{1-k_0}{1+k_0}, \qquad k_0 = \frac{1-k}{1+k}.$$

Évidemment l'équation en k est du degré $2\Phi(n)$; elle a pour racines les modules qui admettent une multiplication de la forme suivante :

$$(75)\qquad \begin{cases}\varepsilon.2\omega \;= 4\rho' n'.2\omega + 2\sigma' n'\omega',\\ \varepsilon \quad \omega' = -(4\rho' t + \rho' n'').2\omega - (2\sigma' t + 4\sigma n'')\omega'.\end{cases}$$

En raisonnant sur cette équation comme dans les nos **25** et **26**, on trouve facilement

$$F(2n) + 2F(2n - 2^2) + 2F(2n - 4^2) + \ldots = \Phi(n).$$

[1] Dans le Mémoire de M. Kronecker le dernier terme $-\left[\frac{3}{2}\right]$ a été omis.

De même, en écrivant, dans les équations (74), (75), $4\sigma + 2$ au lieu de 4σ, c'est-à-dire, en faisant

$$k = \frac{1 + k_0}{1 - k_0}, \qquad k_0 = -\frac{1 - k}{1 + k},$$

on obtient

$$2F(2n - 1^2) + 2F(2n - 3^2) + 2F(2n - 5^2) + \ldots = 2\Phi(n) + \varphi(n).$$

En ajoutant et soustrayant membre à membre les équations trouvées, on a, pour toute valeur impaire de n,

$$(76) \quad \begin{cases} F(2n) + 2F(2n - 1^2) + 2F(2n - 2^2) + 2F(2n - 3^2) + \ldots \\ \quad = 2\Phi(n) + \varphi(n), \end{cases}$$

$$F(2n) - 2F(2n - 1^2) + 2F(2n - 2^2) - 2F(2n - 3^2) + \ldots = -\varphi(n),$$

c'est-à-dire les équations II et III de M. Kronecker.

29. Des équations (71) et (72) on tire aisément la suivante

$$(77) \quad \begin{cases} F(4n) + 2F(4n - 1^2) + 2F(4n - 2^2) + 2F(4n - 3^2) + \ldots \\ \quad = 3\Phi(n) + \Psi(n), \end{cases}$$

qui est un cas spécial de la formule I de Kronecker. Mais, pour la démontrer généralement, il nous faut une nouvelle équation, que nous tirerons de la considération d'une transformation de degré pair, appartenant au second cas (*voir* n° **15**). En conservant la lettre n pour désigner un nombre impair, nous dénotons le degré de la transformation par $m = 2^\pi n$; en faisant comme précédemment $n = n'n''$, la transformation dont il s'agit est définie par les relations

$$\varepsilon_0 2\omega = n' . 2\omega_0,$$
$$\varepsilon_0 \ \omega' = -t . 2\omega_0 + 2^\pi n'' \omega'_0.$$

L'équation modulaire correspondante

$$(78) \qquad f(k^2, k_0^2) = 0$$

est le produit de plusieurs équations modulaires, principales et irréductibles, du cas II, dont les degrés sont des facteurs de m de la forme $2^\pi(2h+1)$. De ce qui est dit au n° **15** nous pouvons conclure que notre équation est du degré $2^\pi\Phi(n)$ en k^2, aussi bien qu'en k_0^2, et que les plus hautes puissances de k^2 et de k_0^2 se trouvent multipliées ensemble. Donc, en faisant $k_0^2 = k^2$, on obtient une équation en k^2 du degré $2^{\pi+1}\Phi(n)$. Comme le fait voir la relation $\zeta_0 = \frac{t+n'\zeta}{n''2^\pi}$, cette équation a la racine $k^2 = 0$.

Pour en trouver la multiplicité, il suffit de remarquer que, pour les infiniment petites valeurs de k^2, l'équation peut être écrite

$$\Pi\left[(k_0^2)^{2^\pi n''} - A(k^2)^{n''}\right] = 0,$$

où n doit être égalé successivement à tous les diviseurs de n. Il en résulte, en effet, qu'on trouve la multiplicité de la racine zéro en décomposant le nombre m de toutes les manières possibles en deux facteurs dont l'un est impair, et faisant la somme de ceux qui sont moindres que $\sqrt{m}$. Nous désignerons cette somme par $S(m)$. Enfin, puisque l'équation (78) peut aussi être écrite $f(k'_0, k'^2) = 0$ (**15**), on voit que l'équation $f(k^2, k^2) = 0$ admet la racine $k^2 = 1$ avec la multiplicité $S(m)$. Donc, en supprimant les racines 0 et 1, on a une équation finale du degré

$$2^{\pi+1}\Phi(n) - 2S(m).$$

En égalant ce degré au nombre des racines de l'équation, on trouve facilement la formule suivante :

$$(79)\qquad \left\{\begin{aligned} &F(4m-1^2) + F(4m-3^2) + F(4m-5^2) + \ldots \\ &\quad = 2^\pi\Phi(n) - S(m). \end{aligned}\right.$$

Faisant $m = 2n$, l'équation (76) donne

$$F(4m) + 2F(4m-2^2) + 2F(4m-4^2) + \ldots = 4\Phi(n);$$

donc, ayant, pour $m = 2n$,

$$2S(m) = \Phi(m) - \Psi(m) = 3\Phi(n) - \Psi(m);$$

on trouve

$$(80)\quad \begin{cases} F(4m)+2F(4m-1^2)+2F(4m-2^2)+\ldots \\ \qquad =5\Phi(n)+\Psi(m)=\Phi(m)+\Psi(m)+2\Phi(n): \end{cases}$$

cette équation a aussi lieu pour $\pi=0$, $m=n$, puisque dans ce cas elle rentre dans (77). Par là la formule (I) de M. Kronecker est démontrée pour $\pi=0$ et $\pi=1$. Pour achever la démonstration, il suffit maintenant de faire voir qu'elle subsiste pour le nombre $4m$, si elle subsiste pour le nombre m. En multipliant l'équation (80) par 2, on obtient

$$\begin{aligned} &F(16m)+2F(16m-2^2)+2F(16m-4^2)+\ldots \\ &\quad =2\Phi(m)+2\Psi(m)+4\Phi(n); \end{aligned}$$

de plus l'équation (79) donne

$$\begin{aligned} &2F(16m-1^2)+2F(16m-3^2)+2F(16m-5^2)+\ldots \\ &\quad =2^{\pi+3}\Phi(n)-2S(4m), \end{aligned}$$

donc

$$(81)\quad \begin{cases} F(16m)+2F(16m-1^2)+2F(16m-2^2)+\ldots \\ \qquad =(2^{\pi+3}+4)\Phi(n)+2\Phi(m)+2\Psi(m)-2S(4m). \end{cases}$$

Or, si l'on désigne pour un moment par $T(m)$ la somme des facteurs de m qui sont moindres que $\sqrt{m}$, on a

$$T(4m)=2T(m)+S(4m);$$

donc

$$\begin{aligned} 2S(4m)&=2T(4m)-4T(m) \\ &=\Phi(4m)-\Psi(4m)-2\Phi(m)+2\Psi(m). \end{aligned}$$

En substituant cette expression de $S(4m)$ dans le second membre de l'équation (81), il devient

$$(2^{\pi+3}+4)\Phi(n)-\Phi(4m)+\Psi(4m)+4\Phi(m)$$

ou bien, en vertu de la relation $\Phi(m) = (2^{\pi+1} - 1)\Phi(n)$,

$$\Phi(4m) + \Psi(4m) + 2\Phi(n),$$

ce qui achève la démonstration de l'équation (80).

V. — L'équation de la division des périodes; l'équation modulaire.

30. Soit k un module singulier du déterminant $-$ D, défini par l'équation

$$a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0,$$

le plus grand commun diviseur des nombres a, $2b$, c étant 1 ou 2 suivant l'espèce du module, et soit pour abréger $\varepsilon = i\sqrt{D}$. Supposons de plus que k^2 satisfait à une équation algébrique

$$\Phi(k^2) = 0,$$

du nombre de celles que nous avons déduites dans le § III, n^{os} **10**, **11**, **13**, **14**, **16-19**. Regardons k^2 comme une quantité connue; soit p un nombre impair, et considérons l'équation du degré $p^2 - 1$

$$F(z) = 0,$$

dont les racines sont les quantités $\lambda\left(\frac{r.2\omega + s\omega'}{p}\right)$, et dont les coefficients sont, comme on le sait, des polynômes en k^2 à coefficients entiers.

Si l'on désigne par Ω une période quelconque, on a (n° **21**)

$$\lambda\left[\frac{(r+s\varepsilon)\Omega}{p}\right] = \frac{P}{Q + \mu\left(\frac{\Omega}{p}\right)\nu\left(\frac{\Omega}{p}\right)R},$$

P, Q, R étant des fonctions entières de $\lambda\left(\frac{\Omega}{p}\right)$, k^2 et de ε. Or on sait que $\mu\left(\frac{\Omega}{p}\right)\nu\left(\frac{\Omega}{p}\right)$ peut être exprimé en fonction rationnelle de $\lambda^2\left(\frac{\Omega}{p}\right)$ et de k^2 : donc on peut déduire de l'équation précédente une relation

de la forme

$$\lambda\left[\frac{(r+s\varepsilon)\Omega}{p}\right] = f\left[\lambda\left(\frac{\Omega}{p}\right)\right], \tag{82}$$

f dénotant une fonction rationnelle dont les coefficients sont des polynômes en k^2 et en ε à coefficients entiers. Il importe de remarquer que l'expression $f\left[\lambda\left(\frac{\Omega}{p}\right)\right]$ est identiquement la même pour toutes les périodes et pour tous les modules qui satisfont à l'équation $\Phi(k^2) = 0$.

Au moyen des relations (82), il est facile de faire voir que l'équation $F(z) = 0$ est abélienne, au moins après l'adjonction de ε. En faisant

$$\varpi = m\,.\,2\omega + m'\omega',$$

d'où

$$\varepsilon\varpi = (mb - m'c)\,2\omega + (ma - m'b)\,\omega',$$

on voit aisément que l'aire du parallélogramme $(\varpi, \varepsilon\varpi)$ est égale à celle du parallélogramme $(2\omega, \omega')$ multiplié par $(am^2 - 2bmm' + cm'^2)$. Or, si la classe de formes quadratiques, à laquelle correspond le module, contient la forme $x^2 + y^2 D$, on peut faire $am^2 - 2bmm' + cm'^2 = 1$; par cela le parallélogramme $(\varpi, \varepsilon\varpi)$ devient élémentaire, et, par suite, toutes les périodes sont contenues dans l'expression $(r + s\varepsilon)\varpi$. Pour les autres modules, cela n'est pas possible; mais dans tous les cas on peut rendre $am^2 - 2bmm' + cm'^2$ premier à p. La période ϖ étant choisie de cette manière, on démontre facilement que l'égalité

$$\lambda\left[\frac{(r+s\varepsilon)\varpi}{p}\right] = \lambda\left[\frac{(r'+s'\varepsilon)\varpi}{p}\right]$$

exige qu'on ait

$$r \equiv r', \qquad s \equiv s' \pmod{p},$$

et que, par conséquent, toutes les racines de l'équation $F(z) = 0$ sont contenues dans l'expression $\lambda\left[\frac{(r+s\varepsilon)\varpi}{p}\right]$. Or, en remplaçant, dans les équations

$$\lambda\left[\frac{(r+s\varepsilon)\varpi}{p}\right] = f\left[\lambda\left(\frac{\varpi}{p}\right)\right], \qquad \lambda\left[\frac{(r'+s'\varepsilon)\varpi}{p}\right] = f_1\left[\lambda\left(\frac{\varpi}{p}\right)\right],$$

ϖ respectivement par $(r'+s'\varepsilon)\varpi$, $(r+s\varepsilon)\varpi$, on trouve

$$\lambda\left[\frac{(r+s\varepsilon)(r'+s'\varepsilon)\varpi}{p}\right]=f\left\{f_1\left[\lambda\left(\frac{\varpi}{p}\right)\right]\right\}=f_1\left\{f\left[\lambda\left(\frac{\varpi}{p}\right)\right]\right\},$$

ce qui fait voir que l'équation $F(z)=0$ est abélienne, si ε est une quantité connue, ou si elle a été adjointe à l'équation. Dans les cas de la première catégorie d'un déterminant de la forme $-(4h-1)$, ε s'exprime rationnellement en k^2; dans les autres cas, l'adjonction de ε peut être remplacée par celle de i (n° 22). Mais, comme nous l'avons déjà dit, l'introduction de ε dans le second membre de l'égalité (82) a eu pour effet de rendre les mêmes formules applicables à tous les modules qui satisfont à l'équation $\Phi(k^2)=0$. Cela n'a pas d'importance quand il s'agit seulement de la résolution de l'équation $F(z)=0$; mais c'est un point essentiel pour les applications que nous avons à faire des propriétés de cette équation.

D'ailleurs les modules de la seconde espèce peuvent être traités, ici et plus bas, d'une manière spéciale, en faisant usage des multiplicateurs de la forme $\frac{1+i\sqrt{D}}{2}$; mais, puisque cela n'exige que des modifications légères, il suffit de l'avoir indiqué.

31. En étudiant de plus près la résolution de l'équation de division des périodes, nous nous bornerons au cas où p est un nombre premier impair; la résolution étant connue pour ce cas, on en tire celle des équations plus générales par la théorie de la division de l'argument et le théorème d'addition. On sait que, pour les modules indéterminés, le groupe de l'équation proposée est le groupe linéaire du degré p^2-1, et qu'en adjoignant à l'équation les racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité, il se réduit au groupe de monodromie, qui contient les substitutions linéaires dont les déterminants sont congrus à l'unité suivant le module p [1].

---

(1) Voyez le *Traité des substitutions* de M. Jordan, n° 476. Dans une Note insérée aux *Comptes rendus de la Société des Sciences de Christiania*, année 1871, j'ai démontré que le groupe algébrique contient toutes les substitutions linéaires, et qu'il se réduit au groupe de monodromie par l'adjonction de $e^{\frac{2\pi i}{p}}$. M. Kronecker a donné une autre démonstration dans les *Monatsberichte de l'Académie de Berlin*, année 1875. M. H. Weber y en a joint une troisième dans son travail sur la multiplication complexe (*Acta mathematica*, t. VI).

Par conséquent, si k est un module singulier, le groupe de l'équation $F(z) = 0$ est contenu dans le groupe linéaire, et si l'on adjoint la quantité $e^{\frac{2\pi i}{p}}$, il est contenu dans le groupe des substitutions linéaires dont les déterminants sont congrus à 1 (mod p). On sait de plus que pour les modules de la première catégorie dont le déterminant est de la forme $-(4h-1)$ le groupe ne peut contenir que des substitutions compatibles avec les relations (82); la même chose a lieu pour les autres modules, quand on adjoint à l'équation l'irrationnelle $i\sqrt{D}$. En faisant

$$z_{x,y} = \lambda\left(\frac{x.2\omega + y\omega'}{p}\right),$$

on a la relation

$$\lambda\left(\varepsilon\frac{x.2\omega + y\omega'}{p}\right) = f\left[\lambda\left(\frac{x.2\omega + y\omega'}{p}\right)\right]$$

ou bien

$$z_{bx-cy,ax-by} = f(z_{x,y}).$$

Soit

$$S = | \; x, y \quad rx + sy, r'x + s'y \; |$$

une substitution du groupe; on a, en exprimant qu'elle laisse subsister la relation ci-dessus

$$(83) \qquad \left\{\begin{aligned} &r(bx - cy) + s(ax - by) \\ &\quad \equiv b(rx + sy) - c(r'x + s'y), \\ &r'(bx - cy) + s'(ax - by) \\ &\quad \equiv a(rx + sy) - b(r'x + s'y) \end{aligned}\right\} \pmod p,$$

congruences qui doivent être vérifiées pour toute combinaison de valeurs de x et de y, et qui expriment en même temps que S est échangeable à la substitution

$$| \; x, y \quad bx - cy, ax - by \; |,$$

si d'ailleurs ce symbole désigne réellement une substitution. On en tire

$$(84) \qquad \frac{r'}{a} \equiv \frac{r - s'}{2b} \equiv -\frac{s}{c} \pmod p.$$

De même les conditions à remplir pour que S soit échangeable à la substitution

$$|\; x, y \quad r_1 x + s_1 y, r'_1 x + s'_1 y \;|$$

sont les suivantes

$$\frac{r'}{r'_1} \equiv \frac{r - s'}{r_1 - s'_1} \equiv \frac{s}{s_1} \pmod p.$$

Il s'ensuit que les substitutions définies par les congruences (84) sont échangeables entre elles; elles forment évidemment un groupe, que nous désignerons par G. De ce qui précède on conclut que, pour les modules de la première catégorie dont le déterminant est de la forme $-(4h-1)$, le groupe de l'équation $F(z) = 0$ est contenu dans le groupe G, et que, pour les autres modules, cela a aussi lieu, pourvu qu'on adjoigne à l'équation la quantité ε. Pour trouver quel peut être, pour ces derniers modules, le groupe avant l'adjonction de ε, considérons la relation

$$\lambda^2\left(\varepsilon\frac{x.2\omega + y\omega'}{p}\right) = f_1\left[\lambda^2\left(\frac{x.2\omega + y\omega'}{p}\right)\right],$$

qu'on obtient de la précédente en l'élevant au carré, et dans laquelle ε n'entre pas [n° **21**, équation (57)]. On voit immédiatement que les substitutions du groupe vérifient ou les congruences (84) ou celles qu'on en déduit en changeant le signe des seconds membres; on trouve ainsi les substitutions de G et celles de la forme suivante

$$T = |\; x, y \quad rx + sy, r'x - ry \;|,$$

r, r', s satisfaisant à la congruence

$$as + 2br - cr' \equiv 0 \pmod p.$$

Ces substitutions forment un groupe H, contenant G, et l'on sait que, pour les modules en question, le groupe de l'équation $F(z) = 0$, sans adjonction préalable, est contenu dans H. Enfin nous désignons par Γ le groupe contenant celles des substitutions de G dont les déterminants sont congrus à $1 \pmod p$.

Dans ce qui précède on peut remplacer les périodes 2ω et ω' par la période ϖ, définie au numéro précédent, et $\varpi' = \varepsilon\varpi$, pourvu qu'on remplace les nombres a, b, c respectivement par 1, 0, $-D$; par là on obtient pour S la forme suivante

$$S = | \, x, y \quad rx - r'Dy, r'x + ry \, |,$$

et l'on trouve qu'elle remplace $\lambda\left[\frac{(x+y\varepsilon)\varpi}{p}\right]$ par $\lambda\left[\frac{(r+r'\varepsilon)(x-y\varepsilon)\varpi}{p}\right]$. La substitution T devient

$$T = | \, x, y \quad rx + r'Dy, r'x - ry \, |;$$

elle remplace $\lambda\left[\frac{(x+y\varepsilon)\varpi}{p}\right]$ par $\lambda\left[\frac{(r+r'\varepsilon)(x-y\varepsilon)\varpi}{p}\right]$. Parmi les substitutions de H se trouve la suivante

$$T_0 = | \, x, y \quad x, -y \, |,$$

et l'on a

$$T = T_0 S,$$

$$\begin{aligned} T_0^{-1} S T_0 &= | \, x, y \quad rx + r'Dy, -r'x + ry \, | \\ &= S^{-1} | \, x, y \quad (r^2 + r'^2 D)x, (r^2 + r'^2 D)y \, |; \end{aligned}$$

on en conclut que les substitutions de H sont permutables à G, et que son ordre est le double de celui de G, comme cela doit être, si le groupe de l'équation $F(z) = 0$ se confond effectivement avec H (*voir* le Traité de M. Jordan, n°s 376, 378).

L'ordre du groupe G est différent, suivant que $-D$ est résidu quadratique de p, divisible par p, ou non-résidu quadratique de p; on le trouve égal à $(p-1)^2$ dans le premier cas, à $p^2 - p$ dans le deuxième, et à $p^2 - 1$ dans le troisième. Examinons séparément ces trois cas.

A. Supposons que $-D$ soit résidu quadratique de p et faisons

$$\rho^2 + D = pq.$$

On a

$$z_{x,y} = \lambda\left[\frac{(x+y\varepsilon)\varpi}{p}\right] = \lambda\left[\frac{q(x+y\varepsilon)\varpi}{\rho^2 + D}\right],$$

et l'on remarque les deux systèmes contenant chacun $p-1$ racines d'une forme spéciale

$$\lambda\left(\frac{tq\varpi}{\rho-\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad \lambda\left(\frac{tq\varpi}{\rho+\varepsilon}\right),$$

où $t = 1, 2, \ldots, (p-1)$.

Par les substitutions de G les racines de chacun de ces systèmes s'échangent entre elles ; en effet, on a

$$\lambda\left[\frac{tq(r+r'\varepsilon)\varpi}{\rho\mp\varepsilon}\right] = \lambda\left[\frac{tq(r+r'\varepsilon)\varpi}{\rho\mp\varepsilon} \pm tqr'\varpi\right] = \lambda\left[\frac{tq(r\pm r'\rho)\varpi}{\rho\mp\varepsilon}\right].$$

Par la substitution T_0 les deux systèmes s'échangent entre eux. Donc l'équation $F(z) = 0$ est réductible et se partage en deux autres

$$F_1(z) = 0, \qquad F_2(z) = 0,$$

dont la première est du degré $2(p-1)$, la seconde du degré $(p-1)^2$. Quand le groupe est contenu dans G, soit originairement, soit par adjonction de ε, la première se partage de nouveau en deux équations du degré $p-1$,

$$F'_1(z) = 0, \qquad F''_1(z) = 0,$$

dont la première a pour racines les $\lambda\left(\frac{tq\varpi}{\rho-\varepsilon}\right)$, la seconde les $\lambda\left(\frac{tq\varpi}{\rho+\varepsilon}\right)$. En adjoignant à l'équation $F(z) = 0$ les deux quantités $\lambda\left(\frac{q\varpi}{\rho-\varepsilon}\right)$, $\lambda\left(\frac{q\varpi}{\rho+\varepsilon}\right)$, son groupe se réduit à la substitution identique ; par conséquent les racines de l'équation $F(z) = 0$ s'expriment rationnellement par $\lambda\left(\frac{q\varpi}{\rho-\varepsilon}\right)$ et $\lambda\left(\frac{q\varpi}{\rho+\varepsilon}\right)$. Et, en effet, on peut faire

$$\lambda\left[\frac{q(x+y\varepsilon)\varpi}{\rho^2+D}\right] = \lambda\left(\frac{\xi q\varpi}{\rho-\varepsilon} + \frac{\eta q\varpi}{\rho+\varepsilon}\right),$$

et trouver ainsi l'expression en question. D'ailleurs c'est là une propriété générale de l'équation de la division des périodes. Les nombres ξ et η sont déterminés par les congruences

$$\xi \equiv \frac{x+y\rho}{2\rho}, \qquad \eta \equiv \frac{x-y\rho}{2\rho} \pmod{p};$$

si on les prend pour indices, les substitutions du groupe G se réduisent simultanément à leurs formes canoniques, car évidemment on a

$$S = |\ \xi, \eta \quad (r + r'\rho)\xi, (r - r'\rho)\eta\ |;$$

la substitution T_0 devient

$$T_0 = |\ \xi, \eta \quad \eta, \xi\ |.$$

Le calcul des polynômes $F'_1(z)$, $F''_1(z)$ peut être fait de la manière suivante. On voit aisément que les $p-1$ quantités $\lambda\left(\frac{tq\varpi}{\rho-\varepsilon}\right)$ sont les seules valeurs de $\lambda(\theta)$ qui satisfassent en même temps aux équations

$$\lambda[(\rho-\varepsilon)\theta] = 0, \qquad \frac{\lambda(p\theta)}{\lambda(\theta)} = 0.$$

Or on a

$$(85) \qquad \lambda[(\rho-\varepsilon)\theta] = \frac{\psi[\lambda(\theta)]}{\psi_1[\lambda(\theta)] + \mu(\theta)\nu(\theta)\psi_2[\lambda(\theta)]},$$

ψ, ψ_1, ψ_2 dénotant des fonctions entières dont les coefficients sont rationnels en k^2 et ε; donc $\lambda[(\rho-\varepsilon)\theta]$ ne peut s'annuler que quand on a

$$\psi[\lambda(\theta)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda(\theta) = \infty;$$

mais $\lambda(\theta) = \infty$ donne

$$\frac{\lambda(p\theta)}{\lambda(\theta)} = \frac{1}{p}:$$

donc l'équation $\lambda[(\rho-\varepsilon)\theta] = 0$ peut être remplacée par $\psi[\lambda(\theta)] = 0$. Par conséquent on trouve $F'_1(z)$ en cherchant le plus grand commun diviseur des polynômes $\psi(z)$ et $F(z)$; en y changeant le signe de ε, on a $F''_1(z)$. On voit que les expressions qu'on trouve de cette manière sont applicables indistinctement à toutes les valeurs de k^2 qui satisfont à l'équation $\Phi(k^2) = 0$.

En adjoignant ε, si cela simplifie le groupe, et en outre les racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité, le groupe se réduit à être contenu dans Γ, dont les substitutions, réduites à leurs formes canoniques, sont les suivantes

$$\left|\ \xi, \eta \quad m\xi, \frac{1}{m}\eta\ \right|.$$

Par cette adjonction $F'_1(z) = 0$, $F''_1(z) = 0$ ne se décomposent pas; mais $F_2(z) = 0$ est décomposée en $p - 1$ équations du degré $p - 1$. De plus, on voit que toutes les racines de l'équation $F(z) = 0$ s'expriment rationnellement en $\lambda\left(\frac{q\varpi}{\rho - \varepsilon}\right)$, k^2, $e^{\frac{2\pi i}{p}}$ et ε (si cette dernière quantité a dû être adjointe).

B. Supposons D divisible par p, et faisons

$$D = pq.$$

Les substitutions de G sont réduites à leurs formes canoniques par l'introduction des périodes ϖ et $\varepsilon\varpi$; on a, en effet,

$$S = |\ x, y \quad rx, ry + r'x\ |.$$

Les quantités $\lambda\left(\frac{y\varepsilon\varpi}{p}\right)$ s'échangent entre elles par les substitutions du groupe H; par conséquent, elles sont les racines d'une équation

$$F_1(z) = 0,$$

du degré $(p - 1)$. On peut calculer $F_1(z)$ par la méthode indiquée dans le cas précédent; on n'a qu'à faire $\rho = 0$ dans la formule (85): car les $\lambda\left(\frac{y\varepsilon\varpi}{p}\right)$ sont les seules racines communes aux deux équations $\psi(z) = 0$ et $F(z) = 0$, et, par conséquent, $F_1(z)$ est le plus grand diviseur commun à $\psi(z)$ et à $F(z)$; évidemment ε n'y entre pas. En faisant

$$F(z) = F_1(z)\,F_2(z),$$

l'équation $F_2(z) = 0$ se décompose par l'adjonction de $\lambda\left(\frac{\varepsilon\varpi}{p}\right)$ en $p - 1$ équations du degré p. Et, en effet, nous avons

$$\lambda\left(\frac{\varepsilon x\varpi}{p}\right) = f\left[\lambda\left(\frac{x\varpi}{p}\right)\right] = f\left\{\lambda\left[\frac{(x + y\varepsilon)\varpi}{p}\right]\right\},$$

y ayant les valeurs $0, 1, 2, \ldots, (p - 1)$, de sorte que les p quantités $\lambda\left[\frac{(x + y\varepsilon)\varpi}{p}\right]$ sont racines de l'équation

$$f(z) - \lambda\left(\frac{\varepsilon x\varpi}{p}\right) = 0,$$

et il est facile de voir qu'elles sont les seules racines communes à cette équation et à l'équation $F(z) = 0$. On trouve donc, par le procédé du plus grand commun diviseur, une équation

$$\varphi\left[z, \lambda\left(\frac{\varepsilon x \varpi}{p}\right)\right] = 0,$$

dont les racines sont les p quantités $\lambda\left[\frac{(x + y\varepsilon)\varpi}{p}\right]$.

Adjoignons maintenant ε (si cela simplifie le groupe) et $e^{\frac{2\pi i}{p}}$; par cela le groupe est réduit à ne contenir que des substitutions de la forme

$$| \, x, y \quad x, y + r'x \, |.$$

On voit immédiatement que l'équation $F_1(z) = 0$ se trouve résolue, c'est-à-dire que les quantités $\lambda\left(\frac{y\varepsilon\varpi}{p}\right)$ s'expriment rationnellement en k^2, $e^{\frac{2\pi i}{p}}$ et ε (si, d'ailleurs, cette dernière quantité a dû être adjointe). Les équations $\varphi\left[z, \lambda\left(\frac{\varepsilon x \varpi}{p}\right)\right] = 0$ ne se décomposent pas; mais leurs coefficients sont rationnels en k^2, $e^{\frac{2\pi i}{p}}$ et ε.

C. Supposons enfin $-$ D non résidu quadratique de p. Dans ce cas, la congruence

$$\varepsilon^2 + D \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, p)$$

étant irréductible, on peut distinguer les racines de l'équation proposée par un seul indice de la forme $x + y\varepsilon$, pris suivant le module p. Faisons donc

$$z_\xi = \lambda\left(\frac{\xi\varpi}{p}\right) = \lambda\left[\frac{(x + y\varepsilon)\varpi}{p}\right].$$

Les substitutions du groupe G prennent évidemment la forme

$$| \, \xi \quad M\xi \, |,$$

où

$$M = r + r'\varepsilon;$$

on aura, de plus,

$$T_0 = | \, \xi \quad \xi^p \, |,$$

de sorte que les substitutions du groupe H auront la forme

$$|\,\xi \quad M\xi^{p^\nu}\,|,$$

ν étant égal à 1 ou à 2. En adjoignant ε, dans les cas où cela simplifie le groupe, et, en outre, $e^{\frac{2\pi i}{p}}$, le groupe se réduit à être contenu dans Γ. Or, ayant $M = r + r'\varepsilon$, $M^p \equiv r - r'\varepsilon \pmod{p}$, on en conclut que

$$M^{p+1} \equiv r^2 + r'^2 D \equiv 1 \pmod{p}.$$

Donc, en désignant par j une racine primitive de la congruence $\xi^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p}$, les substitutions de Γ auront la forme

$$|\,\xi \quad j^{h(p-1)}\xi\,|,$$

où $h = 0, 1, 2, \ldots, p$; par conséquent, l'ordre de Γ est égal à $p+1$. Il s'ensuit que par l'adjonction de $e^{\frac{2\pi i}{p}}$ et de ε (si cela simplifie le groupe), l'équation $F(z) = 0$ se décompose en $p-1$ équations du degré $p+1$.

Dans tous les trois cas, une fonction rationnelle des quantités $\lambda\left[\frac{(x+y\varepsilon)\varpi}{p}\right]$, invariable par les substitutions du groupe G, s'exprime rationnellement en k^2 et en $i\sqrt{D}$ d'une manière identique pour toutes les valeurs de k^2, racines de l'équation $\Phi(k^2) = 0$. On le démontre facilement, en remarquant que la fonction s'exprime, pour tous ces modules, d'une manière identique, sous la forme

$$U = \varphi_1\left[\lambda\left(\frac{\varpi}{p}\right)\right] + i\sqrt{D}\,\varphi_2\left[\lambda\left(\frac{\varpi}{p}\right)\right],$$

et que, si une substitution de G change U en U_1, $\lambda\left(\frac{\varpi}{p}\right)$ en $\lambda\left(\frac{\varpi_1}{p}\right)$, on a

$$U_1 = \varphi_1\left[\lambda\left(\frac{\varpi_1}{p}\right)\right] + i\sqrt{D}\,\varphi_2\left[\lambda\left(\frac{\varpi_1}{p}\right)\right].$$

32. De ce qui précède on tire facilement des conséquences importantes relatives aux équations modulaires principales. Nous ne considérerons que les équations entre les carrés des modules.

Il est d'abord évident que, pour les modules singuliers, l'équation modulaire qui répond à une transformation d'un degré impair est abélienne, au moins après l'adjonction de ε.

Supposons que p soit un nombre premier impair. En désignant par k_u le module transformé qu'on obtient par la division en p parties égales de la période $x.2\omega + y\omega'$, $\frac{x}{y}$ étant congru à $u \pmod{p}$, on sait qu'*en général* le groupe de l'équation modulaire contient les substitutions de la forme

$$\left| u \quad \frac{ru+s}{r'u+s'} \right|;$$

on sait, de plus, que l'adjonction du radical $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$ réduit le groupe à ne contenir que les substitutions dont les déterminants $rs' - r's$ sont résidus quadratiques de p. [Voir le *Traité des substitutions* de M. Jordan, n° 480 ([1]).] Pour les modules singuliers, les nombres r, s, r', s' ont évidemment les mêmes valeurs que dans le groupe de l'équation de la division des périodes sous les mêmes hypothèses relatives aux quantités adjointes. On obtient ainsi trois groupes H', G', Γ' correspondant aux groupes H, G, Γ du numéro précédent. Avec les indices relatifs aux périodes ϖ et $\varepsilon\varpi$, le groupe H' contient les substi-

---

([1]) La démonstration de M. Jordan est fondée sur le théorème, dû à M. Hermite, que le discriminant de l'équation modulaire est égal à $(-1)^{\frac{p-1}{2}} p$ multiplié par le carré d'un polynôme en k^2 à coefficients entiers. Ce théorème est une conséquence de la réduction du groupe de l'équation de division des périodes par l'adjonction de $e^{\frac{2\pi i}{p}}$. En effet, d'après une remarque de M. Jordan (*Traité*, p. 343), le produit des différences des racines de l'équation modulaire est une fonction rationnelle des racines de l'équation de la division des périodes, invariable par toute substitution linéaire dont le déterminant est résidu quadratique et, par conséquent, invariable par le groupe de monodromie de l'équation modulaire. Donc le produit est fonction rationnelle de k^2, et, puisqu'il ne devient pas infini pour des valeurs finies de k^2, cette fonction est entière. Les coefficients sont évidemment rationnels en $e^{\frac{2\pi i}{p}}$, et, comme ils n'ont que deux valeurs, numériquement égales et de signes contraires, il est facile de voir qu'ils sont de la forme $a\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$, a étant un entier.

tutions

$$\left| u \quad \frac{ru \mp r'\mathrm{D}}{r'u \pm r} \right|;$$

G′ contient celles qu'on obtient en prenant, dans l'expression ci-dessus, les signes supérieurs. Enfin Γ′ contient les substitutions de G′ dont le déterminant $r^2 + r'^2\mathrm{D}$ est un résidu quadratique; mais il faut remarquer que, en vertu du théorème de M. Jordan, cité plus haut, le groupe de l'équation modulaire se réduit d'être contenu dans G′ à être contenu dans Γ′, déjà par l'adjonction de $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$.

Cela posé, considérons les trois cas du numéro précédent.

A. Soit $-\mathrm{D}$ résidu quadratique de p. Nous désignerons par k_u le module transformé obtenu par la division de la période

$$[(\xi + \eta)\rho + (\xi - \eta)\varepsilon]\varpi,$$

$\frac{\xi}{\eta}$ étant congru à $u \pmod p$. On voit immédiatement que le groupe H′ contient les substitutions

$$\left| u \quad \frac{r + r'\rho}{r - r'\rho}u \right|, \quad \left| u \quad \frac{1}{u} \right|.$$

Donc, $\frac{r + r'\rho}{r - r'\rho}$ pouvant avoir toutes les valeurs $(\bmod p)$, excepté ∞ et 0, le groupe H′ consiste dans les $2(p-1)$ substitutions suivantes

$$|u \quad mu|, \quad \left| u \quad \frac{m}{u} \right|.$$

Il s'ensuit que l'équation modulaire est réductible, k_∞^2 et k_0^2 satisfaisant à une équation du second degré, les autres k_u^2 à une équation du degré $p-1$. Le groupe G′ contient seulement les substitutions

$$|u \quad mu|;$$

donc, quand le groupe de l'équation modulaire est contenu dans G′, k_∞^2 et k_0^2 sont rationnels. On peut faire le calcul des expressions de k_∞^2 et de k_0^2 en k^2 et ε, en les regardant respectivement comme fonctions symétriques des racines des équations $\mathrm{F}_1(z) = 0$, $\mathrm{F}'_1(z) = 0$ du numéro

précédent. Enfin le groupe Γ' contient les substitutions $| u \quad m^2 u |$; on en conclut que, par l'adjonction de ε (si cela simplifie le groupe) et de $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$, la seconde équation se partage en deux autres du degré $\frac{1}{2}(p-1)$.

B. Soit $D = p . q$; en désignant par k_u le module obtenu par la division de la période $(x + y\varepsilon)\varpi$, $\frac{y}{x}$ étant $\equiv u \pmod p$, le groupe G' contient les substitutions

$$| u \quad u + r' |,$$

le groupe H', en outre, les substitutions

$$| u \quad -u + r' |.$$

Ces substitutions ne déplaçant pas k_x^2, cette racine est rationnelle en k^2; on peut calculer son expression de la même manière que dans le cas A. Les autres racines satisfont à une équation du degré p, qui est abélienne dans le cas du groupe G'. Γ' se confond avec G'.

C. Supposons enfin que $-$ D soit un résidu quadratique. Posons

$$\xi = x + y\varepsilon \equiv j^u \qquad (\text{mod}\, p),$$

et désignons par k_u le module transformé correspondant à la division de la période $(x + y\varepsilon)\varpi$. Puisque j^{p+1} est congru à un nombre réel, on a $k_{u+p+1}^2 = k_u^2$, de sorte que l'indice u doit être pris suivant le module $(p+1)$. Si, dans les k_u^2, considérés comme fonctions rationnelles de l'équation de division des périodes, on effectue la substitution

$$| \xi \quad j\xi |,$$

on a une substitution entre ces quantités qui a évidemment la forme

$$| u \quad u + 1 |.$$

De même la substitution T_0 produit entre les k_u^2 la substitution $| u \quad -u |$. Donc le groupe H' contient les $2(p+1)$ substitutions $| u \quad \pm u + h |$, le groupe G' les $| u \quad u + h |$, et enfin les substitutions de Γ' seront les $| u \quad u + h(p-1) |$ ou bien les $| u \quad u + 2h |$. Donc, par l'adjonction

de ε (s'il y a lieu) et de $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$, l'équation modulaire se décompose en deux équations abéliennes du degré $\frac{1}{2}(p+1)$.

Évidemment une fonction rationnelle des k_u^2, invariable par les substitutions de G', s'exprime en k^2 et en $i\sqrt{D}$ d'une manière identique pour tous les modules qui satisfont à l'équation $\Phi(k^2)=0$.

Parmi ces résultats, ceux qui concernent les racines rationnelles de l'équation modulaire sont les plus importants. Ils se résument par la proposition suivante :

Si l'on fait subir à un module singulier k^2 du déterminant $-D$, racine de l'équation $\Phi(k^2)=0$, une transformation principale du degré premier impair p, $-D$ étant résidu quadratique de p, deux racines de l'équation modulaire s'expriment rationnellement en k^2, pourvu que D soit de la forme $4h-1$ et que k appartienne à la première catégorie; si D est pair ou de la forme $4h+1$, ou que k appartienne à la seconde catégorie, deux racines s'expriment rationnellement en k^2 et en $i\sqrt{D}$. Si le degré divise D, une racine s'exprime rationnellement en k^2. On peut donner aux expressions des racines rationnelles de l'équation modulaire une telle forme qu'elles sont applicables indistinctement à tous les modules satisfaisant à l'équation $\Phi(k^2)=0$; il suffit, pour cela, que, dans les cas où $-D$ est résidu quadratique de p et de la forme $(4h-1)$ et où k appartient à la première catégorie, on laisse subsister, dans les expressions, l'irrationnelle $i\sqrt{D}$.

Cherchons quelles sont, dans le système primitif d'indices, ces racines rationnelles de l'équation modulaire. En exprimant que la substitution

$$\left| u \quad \frac{ru+s}{r'u+s'} \right|$$

ne déplace pas k_u^2, on a la condition

$$r'u^2-(r-s')u-s\equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} p)$$

ou bien, en vertu des relations (84),

$$au^2-2bu+c\equiv 0;$$

d'où

$$(86)\qquad u \equiv \frac{\pm\rho + b}{a} \equiv \frac{c}{\mp\rho + b} \pmod{p},$$

formule qui, pour $a \equiv 0$, peut être remplacée par

$$(87)\qquad u \equiv \infty, \qquad u \equiv \frac{c}{2b};$$

dans les cas où p divise D, les doubles valeurs coïncident.

VI. — Transformations des modules singuliers.

53. En transformant un module singulier du déterminant $-$ D, on obtient toujours un autre module singulier; ordinairement le déterminant du module transformé est égal à $-$ D multiplié par le carré du degré de la transformation. En effet, si, dans l'équation

$$a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0,$$

on fait

$$\zeta = \frac{r' + s'\zeta_1}{r + s\zeta_1},$$

on obtient une nouvelle équation

$$a_1\zeta_1^2 + 2b_1\zeta_1 + c_1 = 0,$$

où

$$a_1c_1 - b_1^2 = (ac - b^2)(rs' - r's)^2.$$

Mais, dans des cas spéciaux, il arrive que les coefficients a_1, b_1, c_1 ont un diviseur commun, de sorte que, en désignant par $-$ D_1 le déterminant du module transformé, on ait $D_1 < D(rs' - r's)^2$, quelquefois même $D_1 < D$. Évidemment le rapport $\frac{D_1}{D}$ est toujours un carré parfait.

Considérons spécialement les transformations principales d'un degré premier impair p. Le module k_u s'obtient par la division de la période $\Omega = t.2\omega + \delta\omega'$ (nos **8**, **9**), pourvu qu'on ait $\frac{t}{\delta} \equiv u \pmod{p}$; donc, en

désignant par ζ_u le rapport des périodes correspondant à k_u, on a généralement

$$\zeta = \frac{-t + n'\zeta_u}{\delta}, \qquad \zeta_u = \frac{\delta\zeta + t}{n'}.$$

Par conséquent, k_∞ répond aux valeurs $\delta = p$, $n' = 1$, $\zeta_\infty = p\zeta$. Les autres k_u répondent aux valeurs $\delta = 1$, $n' = p$, $t = u$. On a donc

$$\zeta = \frac{\zeta_\infty}{p} = p\zeta_u - u.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation en ζ, on trouve

$$a\zeta_\infty^2 + 2bp\zeta_\infty + cp^2 = 0,$$
$$ap^2\zeta_u^2 + 2p(b - au)\zeta_u + au^2 - 2bu + c = 0.$$

Évidemment p est le seul nombre premier qui puisse diviser à la fois les trois coefficients de l'une ou de l'autre de ces équations. Si, dans la première, a est divisible par p, on a

$$\frac{a}{p}\zeta_\infty^2 + 2b\zeta_\infty + cp = 0,$$

et, par suite, k_∞ appartient, dans ce cas, généralement au déterminant $-$ D. De même, si, dans la seconde équation

$$au^2 - 2bu + c \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, p),$$

on a

$$ap\zeta_u^2 + 2(b - au)\zeta_u + \frac{au^2 - 2bu + c}{p} = 0,$$

et k_u appartient généralement au déterminant $-$ D. Or cette congruence exige que $-$ D soit un résidu quadratique ou un multiple de p; en posant, comme plus haut,

$$\rho^2 + \text{D} \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, p),$$

elle donne

$$u \equiv \frac{\rho + b}{a}, \qquad \text{si } a \text{ est premier à } p,$$

$$u \equiv \frac{c}{2b}, \qquad \text{si } a \text{ est divisible par } p.$$

Donc, si $-$ D est résidu quadratique de p, il y a, parmi les $p+1$ modules transformés, deux qui appartiennent à un déterminant dont la valeur absolue est égale ou moindre que D; si D est multiple de p, il y en a un seul. On voit, de plus, que ces modules sont précisément les racines rationnelles de l'équation modulaire. Ordinairement, ils appartiennent au déterminant $-$ D; mais, si a est divisible par p^2, b par p, k_∞ appartient à $-\frac{D}{p^2}$; si $au^2-2bu+c$ est divisible par p^2, $b-au$ par p, $k_{\frac{b}{a}}$ appartient à $-\frac{D}{p^2}$. Or les égalités

$$D = ac-b^2 = a(au^2-2bu+c)-(b-au)^2$$

font voir que ces conditions ne peuvent être remplies que quand D est divisible par p^2, et que, réciproquement, dans ce cas, l'unique racine rationnelle de l'équation modulaire appartient toujours au déterminant $-\frac{D}{p^2}$.

La notation k_u ayant l'inconvénient de dépendre des coefficients a, b, c qui peuvent avoir une infinité de valeurs différentes pour chaque valeur de k^2, nous adopterons, pour les racines rationnelles, une notation spéciale : p étant, comme ci-dessus, un nombre premier dont $-$ D est un résidu quadratique ou un multiple, ρ une racine déterminée de la congruence $\rho^2+D\equiv 0 \pmod{p}$, $k_{p,\rho}$ désignera, si a est premier à p, la racine rationnelle de l'équation modulaire du degré $p+1$ qui correspond à $u\equiv\frac{\rho+b}{a} \pmod{p}$; si a est divisible par p, on a $\rho=\pm b$; dans ce cas, $k_{p,-b}$ correspondra à $u\equiv\frac{c}{2b}$, $k_{p,+b}$ sera le module que nous avons désigné plus haut par k_∞. Nous poserons, de plus,

$$k_{p,\rho}^2 = \varphi_{p,\rho}(k^2, i\sqrt{D}),$$

où $\varphi_{p,\rho}$, d'après ce qu'on a vu au n° **29**, désigne une fonction rationnelle à coefficients entiers; cette formule est, comme on se rappelle, applicable à toute valeur de k^2, racine de l'équation $\Phi(k^2)=0$; si l'on a $\rho=0$, elle ne contient pas effectivement $i\sqrt{D}$.

En désignant par ζ_1 un rapport de périodes correspondant au mo-

dule $k_{p,\rho}$ et supposant que p^2 ne divise pas D, on a, par conséquent.

$$a_1\zeta_1^2 + 2b_1\zeta_1 + c_1 = 0,$$

où

$$a_1c_1 - b_1^2 = \mathrm{D},$$

et, si p ne divise pas a,

$$(88)\qquad a_1 = ap, \qquad b_1 \equiv b \pmod{a}, \qquad b_1 \equiv -\rho \pmod{p}:$$

ces déterminations ont encore lieu si p divise a et qu'on prenne $\rho \equiv -b$: mais, en faisant $\rho \equiv b$, on a

$$(89)\qquad a_1 = \frac{a}{p}, \qquad b_1 = b.$$

Remarquons encore que $k_{p,\rho}$ est toujours de la même espèce et de la même catégorie que k; de plus, dans les cas où il y a deux équations en k^2 répondant au même déterminant, à la même espèce et à la même catégorie (nos **16, 18**), k et $k_{p,\rho}$ satisfont en même temps à la première ou à la seconde équation. Donc, si D n'est pas divisible par p^2, $k_{p,\rho}^2$ ou $\varphi_{p.\rho}(k^2, i\sqrt{\mathrm{D}})$ est racine de l'équation $\Phi(k^2) = 0$, résultat important pour la résolution de celle-ci.

54. On a vu que, si, dans l'équation modulaire

$$\Psi(k^2, k_0^2) = 0$$

du degré $p+1$, on fait k égal à un module singulier du déterminant $-\mathrm{D}$, les $p+1$ valeurs de k_0^2 seront, à quelques exceptions près, des carrés de modules singuliers du déterminant $-p^2\mathrm{D}$; démontrons maintenant qu'on obtient, de cette manière, tous les modules du déterminant $-p^2\mathrm{D}$.

Soit k_0 un de ces modules, et soit

$$(90)\qquad a_0\zeta_0^2 + 2b_0\zeta_0 + c_0 = 0$$

l'équation qui définit le rapport des périodes. Le coefficient a_0 est ou divisible par p^2 ou premier à p; dans le dernier cas, on peut substituer

à l'équation (90) une autre

$$a'_0 \zeta'^2_0 + 2b'_0 \zeta'_0 + c'_0 = 0,$$

donnant la même valeur de k_0^2, où a'_0 est divisible par p^2. En effet, en posant

$$\zeta_0 = \frac{r' + s'\zeta'_0}{r + 4s\zeta'_0}, \qquad \text{où} \qquad rs' - 4r's = 1,$$

on a

$$a'_0 = a_0 s'^2 + 8b_0 s's + 16c_0 s^2,$$

d'où

$$a_0 a'_0 = (a_0 s' + 4b_0 s)^2 + 16p^2 \mathrm{D} s^2;$$

or on peut choisir s et s', de manière à rendre $a_0 s' + 4b_0 s$ divisible par p, ce qui donne $a'_0 \equiv 0 \pmod{p^2}$. Nous pouvons donc, dans l'équation (90), supposer a_0 divisible par p^2 et, par suite, b divisible par p. Faisant maintenant $\zeta_0 = \frac{1}{p}\zeta$, on a

$$\frac{a_0}{p^2}\zeta^2 + 2\frac{b_0}{p}\zeta + c_0 = 0,$$

ce qui fait voir que k_0 se déduit du module k correspondant au rapport ζ et appartenant au déterminant $-\mathrm{D}$ par une transformation du degré p.

Les valeurs de k_0^2 sont des racines simples de l'équation modulaire. En effet, dans le cas contraire, k_0 se transformerait en lui-même par une transformation du degré p^2, laquelle ne serait pas une multiplication ordinaire; c'est ce qu'on démontre aisément par les relations entre les rapports des périodes; mais on verra que cela conduirait à l'équation impossible $p^2 = (2x+1)^2 + y^2 p^2 \mathrm{D}$, y étant différent de zéro. Il est également facile de voir que deux valeurs de k_0^2, déduites de valeurs différentes de k^2, ne sauront être égales; car, si cela avait lieu, on pourrait, par des transformations principales du degré p, déduire d'un seul module du déterminant $-p^2\mathrm{D}$ deux modules différents du déterminant $-\mathrm{D}$, ce qui est impossible.

Donc, en faisant, dans l'équation $\Psi(k^2, k_0^2) = 0$, k^2 successivement égal à toutes les racines de l'équation $\Phi(k^2) = 0$, débarrassant les

équations des racines qui appartiennent aux déterminants $-D$, $-\frac{D}{p^2}$, si $-D$ est résidu quadratique ou multiple de p, on obtiendra, par la résolution des équations résultantes, toutes les racines de l'équation $\Phi(k^2)=0$ relative au déterminant $-p^2D$, chaque module ne se présentant qu'une seule fois. Il s'ensuit que le nombre des modules appartenant au déterminant $-p^2D$ est $p-1$, p ou $p+1$ fois plus grand que le nombre des modules du déterminant $-D$, suivant que $-D$ est résidu quadratique, multiple ou non résidu de p.

En désignant par $F_1(D)$ le nombre de classes proprement primitives du déterminant $-D$, on en tire la relation connue

$$F_1(p^2D)=\left[p-\left(\frac{-D}{p}\right)\right]F_1(D),$$

où $\left(\frac{-D}{p}\right)$ est le symbole de Legendre, et où, pour $D=1$, le second membre doit être précédé du facteur $\frac{1}{2}$.

Soit maintenant k_0 un module de la première catégorie du déterminant $-4D$; alors, dans l'équation (90), a_0 est divisible par 4, b_0 est pair, c_0 impair. En faisant $\zeta_0=-\frac{1}{2\zeta}$, ce qui répond à la première transformation du degré 2, on obtient

$$c_0\zeta^2-2\left(\frac{b_0}{2}\right)\zeta+\frac{a_0}{4}=0,$$

équation qui définit un module de la première espèce et de la seconde catégorie du déterminant $-D$, et l'on a

$$k_0=\frac{1-k}{1+k}.$$

On voit qu'à chaque valeur de k^2 répondent deux valeurs de k_0^2, et que, pour deux valeurs différentes de k^2, on a des valeurs différentes de k_0^2, à moins que l'une des valeurs de k^2 ne soit la réciproque de l'autre. Donc, si, dans les deux équations en k (n^{os} **15**, **17**), on fait $k=\frac{1-k_0}{1+k_0}$, on obtient les deux équations en k_0^2 du n° **16**; il est, en effet, facile de voir que les puissances impaires de k_0 disparaissent. Cela revient d'ail-

leurs à faire, dans les équations en k de la première espèce et de la première catégorie, $k = \frac{1 - k'_0}{1 + k'_0}$, $k = \frac{k_0 - ik'_0}{k_0 + ik'_0}$.

Il est évident, d'après ce qui vient d'être dit, que le nombre des modules de la première catégorie du déterminant $-4D$ est égal au nombre des modules de la première espèce et de la seconde catégorie du déterminant $-D$ ou, ce qui revient au même, égal au double du nombre des modules de la première espèce et de la première catégorie.

On en tire l'équation

$$(91) \qquad F_1(4D) = 2F_1(D),$$

où il faut omettre le facteur 2 du second membre si $D = 1$.

On voit encore que, par la même transformation, les modules de la première espèce et de la première catégorie d'un déterminant de la forme $-(4h - 1)$ se déduisent de ceux de la seconde espèce et de la seconde catégorie, et *vice versa*. Par conséquent, on obtient l'équation en k^2 relative à la première espèce et à la première catégorie si, dans l'équation en k de la seconde espèce et de la seconde catégorie, on remplace k par $\frac{1-k}{1+k}$ et qu'on chasse les puissances impaires de k. Ainsi tous les modules du déterminant $-(4h - 1)$ peuvent être trouvés au moyen de l'équation modulaire relative au degré h.

Soit, par exemple, $D = 11$; de l'équation de la seconde espèce, trouvée au nº **12**,

$$k^6 + 44ik^5 + 77k^4 - 152ik^3 - 77k^2 + 44ik + 1 = 0,$$

on déduit la suivante :

$$k^{12} - 3k^{10} + 134k^8 - 263k^6 + 134k^4 - 3k^2 + 1 = 0.$$

Pour $D = 15$, on tire de l'équation

$$k^2 - 6(1 - i)k\sqrt{k} + 20ik + 6(1 + i)\sqrt{k} - 1 = 0,$$

trouvée au nº **19**,

$$16k^4 - 28ik^3 - 33k^2 + 28ik + 16 = 0;$$

d'où

$$k^2 = -\tfrac{1}{256}(1 + i\sqrt{3})^2(7 + i\sqrt{15})^2.$$

On a évidemment la proposition suivante : Pour un déterminant de la forme $-(4h-1)$, le nombre des modules singuliers de la première espèce et de la première catégorie est égal au nombre de ceux de la seconde espèce et de la seconde catégorie. En désignant par $G_1(D)$ le nombre des classes primitives du déterminant $-D$, on peut conclure, en se rappelant ce qui a été dit du nombre des modules appartenant à chaque classe (n° **5**), que, si $D = 8h - 1$, on a

$$G_1(D) = 2F_1(D) \tag{92}$$

et, si $D = 8h + 3$,

$$3G_1(D) = 4F_1(D), \tag{93}$$

formule qui, pour $D = 3$, doit être remplacée par $G_1(D) = 2F_1(D)$. Des relations (91), (92), (93) on obtient aisément les équations entre $G(4n)$, $F(4n)$, $G(n)$, $F(n)$ dont il a été parlé au n° **23**. On voit que les règles relatives au nombre des modules s'énoncent plus simplement que celles qui regardent le nombre des classes.

VII. — Résolution des équations des modules singuliers.

35. En nous occupant de la résolution des équations des modules singuliers, nous supposerons adjointe l'irrationnelle $i\sqrt{D}$. Sous cette hypothèse, on a le théorème suivant : *Le carré de tout module singulier s'exprime rationnellement par le carré de tout autre module appartenant au même déterminant, à la même espèce et à la même catégorie.*

Dans la démonstration, nous supposerons que, dans les équations de la forme $a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0$, définissant les modules singuliers, les coefficients a ne soient divisibles par aucun nombre premier impair dont le carré divise D. On sait, en effet, qu'on peut trouver une forme quadratique (a_1, b_1, c_1), équivalente à (a, b, c), telle que a_1 soit pre-

mier à un nombre donné quelconque, et il est facile de voir qu'on peut en même temps obtenir qu'elle réponde au même module que (a, b, c).

Cela posé, commençons la démonstration par le cas de la première espèce et de la seconde catégorie. Soit

$$a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0$$

l'équation du rapport des périodes appartenant au module k; soient, de plus, p un nombre premier divisant a, k_1 le module correspondant au rapport $\zeta_1 = p\zeta$; alors on a

$$\frac{a}{p}\zeta_1^2 + 2b\zeta_1 + cp = 0;$$

de plus, p^2 ne divisant pas D, k_1^2 appartient au déterminant $-$ D et s'exprime rationnellement par k^2. En désignant par p_1 un nombre premier divisant $\frac{a}{p}$, par k_2 le module appartenant au rapport $\zeta_2 = p_1\zeta_1$, on a de même

$$\frac{a}{pp_1}\zeta_2^2 + 2b\zeta_2 + cpp_1 = 0,$$

k_2^2 s'exprimant rationnellement en k_1^2 et, par suite, en k^2. En continuant ainsi, on finit par avoir l'équation

$$\zeta_n^2 + 2b\zeta_n + ac = 0$$

et le module k_n, et l'on sait exprimer k_n^2 rationnellement en k^2; d'ailleurs, cette équation peut être remplacée par la suivante

$$\zeta_n'^2 + \text{D} = 0,$$

qui donne la même valeur de k_n^2. Soient maintenant k_m un module quelconque de la première espèce, de la seconde catégorie et du déterminant $-$ D, ζ_m le rapport de ses périodes, et soit

$$a_m\zeta_m^2 + 2b_m\zeta_m + c_m = 0;$$

on démontre, par une marche inverse, que k_m^2 s'exprime rationnellement en k_n^2 et, par suite, en k^2. En effet, faisant $\zeta_n' = \zeta_n'' + b_m$, ce qui

ne change pas k_n^2, on a

$$\zeta_n''^2 + 2 b_m \zeta_n'' + a_m c_m = 0;$$

en désignant, de plus, par p', p'_1, p'_2, ... les facteurs premiers de a_m, faisant $\zeta_n'' = p'\zeta_{n+1}$, $\zeta_{n+1} = p'_1 \zeta_{n+2}$, ..., on obtient une série d'équations

$$p'\zeta_{n+1}^2 + 2 b_m \zeta_{n+1} + \frac{a_m c_m}{p'} = 0, \qquad p' p'_1 \zeta_{n+2}^2 + 2 b_m \zeta_{n+2} + \frac{a_m c_m}{p' p'_1} = 0, \qquad \ldots$$

et la série des modules correspondants k_{n+1}, k_{n+2}, ... Or les derniers termes de ces séries sont l'équation

$$a_m \zeta_m^2 + 2 b_m \zeta_m + c_m = 0$$

et le module k_m; de plus, le carré de chaque module s'exprimant en fonction rationnelle du carré du précédent, on obtient k_m^2 en fonction rationnelle de k^2.

Considérons ensuite les modules de la première espèce et de la première catégorie. On voit immédiatement que le coefficient a est impairement pair si D est de l'une des formes $4h+1$, $4h+2$, et que, pour $D = 8h+3$, on a $a \equiv 4 \pmod 8$. Pour $D = 8h+7$, on peut, comme on le démontre aisément, sans nuire à la généralité, supposer

$$a \equiv 8 \qquad (\mathrm{mod}\, 16);$$

ainsi ce cas se subdivise en deux autres : $D = 16h + 7$ avec $b = 8h' \pm 1$ et $D = 16h + 15$ avec $b = 8h' \pm 3$. Enfin, dans le cas où D est divisible par 4, les modules se partagent entre deux équations, suivant que $a \equiv 4$ ou $a \equiv 0 \pmod 8$; mais, puisque les racines de l'une de ces équations sont les réciproques de celles de l'autre, il suffit de considérer celle où $a = 4$. Nous pouvons donc supposer que, en posant

$$a = 2^\pi (2l+1),$$

on ait

$$\pi = 1 \qquad \text{si } D = 4h+1,\ 4h+2,$$

$$\pi = 2 \qquad \text{si } D = 8h+3,\ 4h,$$

$$\pi = 3 \qquad \text{si } D = 8h+7.$$

Cela posé, considérons les divers cas. Soit d'abord $D = 4h + 1$; par le procédé employé plus haut, on déduit de l'équation

$$a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0,$$

correspondant au module k, l'équation

$$2\zeta_n^2 + 2\zeta_n + \frac{D+1}{2} = 0,$$

qui répond à un module k_n, k_n^2 étant rationnel en k^2. De ce module et de cette équation, on déduit le module k_m et l'équation

$$a_m\zeta_m^2 + 2b_m\zeta_m + c_m = 0,$$

k_m^2 étant fonction rationnelle de k_n^2 et, par suite, de k^2.

Si D est pair, les choses se passent de la même manière, avec la seule différence que l'équation $2\zeta_n^2 + 2\zeta_n + \frac{D+1}{2} = 0$ est remplacée par

$$2\zeta_n^2 + \frac{D}{2} = 0, \qquad \text{si } D \equiv 2 \pmod 4,$$

par

$$4\zeta_n^2 + \frac{D}{4} = 0, \qquad \text{si } D \equiv 4 \pmod 8$$

et par

$$4\zeta_n^2 + 4\zeta_n + \frac{D+4}{4} = 0, \qquad \text{si } D \equiv 0 \pmod 8.$$

Si $D = 8h + 3$, on obtient l'équation

$$4\zeta_n^2 \pm 2\zeta_n + \frac{D+1}{4} = 0;$$

si $D = 16h + 7$, on trouve

$$8\zeta_n^2 \pm 2\zeta_n + \frac{D+1}{8} = 0,$$

et, si $D = 16h + 15$,

$$8\zeta_n^2 \mp 6\zeta_n + \frac{D+9}{8} = 0,$$

où l'on doit prendre les signes supérieurs si $b \equiv 1$, les inférieurs si

$b \equiv -1 \pmod 4$. On voit par là que les carrés des modules k et k_m s'expriment rationnellement l'un par l'autre, si $b \equiv b_m \pmod 4$. Pour compléter la démonstration, il suffit de remarquer que les modules pour lesquels $b \equiv 1$ sont les réciproques de ceux pour lesquels $b \equiv -1$, ce qu'on vérifie par une transformation linéaire.

Examinons enfin les modules de la seconde espèce. Dans la seconde catégorie, a est impairement pair, b impair; par conséquent, la démonstration se fait comme pour les modules de la première espèce et de la première catégorie d'un déterminant de la forme $4h+1$. Dans la première catégorie, les modules se partagent entre deux équations, dont l'une correspond aux valeurs de a divisibles par 8, l'autre aux valeurs qui ne le sont pas; mais les racines de la seconde étant les réciproques de celles de la première, on peut se borner à celle-ci. De plus, c étant pair, b impair, on a

$$b = 8h' \pm 1, \qquad \text{si } D = 16h + 15;$$
$$b = 8h' \pm 3, \qquad \text{si } D = 16h + 7.$$

On obtient, dans le premier cas,

$$8\zeta_n^2 \pm 2\zeta_n + \frac{D+1}{8} = 0;$$

dans le second,

$$8\zeta_n^2 \pm 6\zeta_n + \frac{D+9}{8} = 0;$$

donc, comme plus haut, k^2 et k_m^2 s'expriment rationnellement l'un en l'autre, pourvu que $b \equiv b_m \pmod 4$. Or les modules pour lesquels $b \equiv -1$ sont les compléments de ceux pour lesquels $b \equiv +1$; pour le faire voir, il suffit d'employer la transformation $\zeta = -\frac{1}{4\zeta'}$, qui change le module en son complément, et l'équation $a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0$ en $4c\zeta'^2 - 2b\zeta' + \frac{a}{4} = 0$, où maintenant $4c$ est divisible par 8, $\frac{a}{4}$ par 2. Par suite, k_m^2 s'exprime rationnellement en k^2, même si

$$b_m \equiv -b \pmod 4.$$

Le théorème est donc démontré dans tous les cas.

56. Par l'adjonction de $i\sqrt{D}$, l'équation $\Phi(k^2) = 0$, qui détermine le carré du module singulier, est devenue abélienne. Il résulte de ce qui est dit au numéro précédent qu'on passe d'une racine à une autre en opérant sur la première plusieurs fois de suite avec les symboles $\varphi_{p,\rho}$, φ_{p_1,ρ_1}, ... du n° **55**, ou en prenant le module réciproque ou le complément du module ainsi obtenu. Pour démontrer le théorème ci-dessus, il suffit donc de faire voir : 1° que les symboles $\varphi_{p,\rho}$, φ_{p_1,ρ_1} sont échangeables, c'est-à-dire qu'on a

$$(k^2_{p,\rho})_{p_1,\rho_1} = (k^2_{p_1,\rho_1})_{p,\rho};$$

2° que

$$\left(\frac{1}{k^2}\right)_{p,\rho} = \frac{1}{k^2_{p,\rho}}, \qquad (1 - k^2)_{p,\rho} = 1 - k^2_{p,\rho}.$$

Remarquons d'abord, pour abréger la démonstration, que dans l'équation $a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0$, qui définit le module k, on peut supposer que a soit premier à pp_1. Cela posé, désignons par ζ', ζ_1, ζ'', ζ_2 les rapports des périodes appartenant respectivement à $k^2_{p,\rho}$, $k^2_{p_1,\rho_1}$, $(k^2_{p,\rho})_{p_1,\rho_1}$, $(k^2_{p_1,\rho_1})_{p,\rho}$, et soit

$$a'\zeta'^2 + 2b'\zeta' + c' = 0, \qquad a_1\zeta_1^2 + 2b_1\zeta_1 + c_1 = 0,$$
$$a''\zeta''^2 + 2b''\zeta'' + c'' = 0, \qquad a_2\zeta_2^2 + 2b_2\zeta_2 + c_2 = 0.$$

Or, si p et p_1 sont différents, on a, d'après les équations (88),

$$a'' = a_2 = app_1$$

et

$$b' \equiv b \quad (\text{mod } a), \qquad b' \equiv -\rho \quad (\text{mod } p),$$
$$b'' \equiv b' \quad (\text{mod } ap), \qquad b'' \equiv -\rho_1 \quad (\text{mod } p_1),$$

d'où

$$b'' \equiv b \quad (\text{mod } a), \qquad b'' \equiv -\rho \quad (\text{mod } p), \qquad b'' \equiv -\rho_1 \quad (\text{mod } p_1);$$

de la même manière, on a

$$b_2 \equiv b \quad (\text{mod } a), \qquad b_2 \equiv -\rho \quad (\text{mod } p), \qquad b_2 \equiv -\rho_1 \quad (\text{mod } p_1);$$

donc

$$b_2 = b'' + happ_1,$$

h étant un entier. En substituant, on trouve

$$app_1\zeta''^2 + 2b''\zeta'' + c'' = 0,$$
$$app_1\zeta_2^2 + 2(b'' + happ_1)\zeta_2 + c_2 = 0;$$

d'où l'on conclut, en se rappelant que les déterminants sont les mêmes,

$$\zeta_2 = \zeta'' - h,$$

ce qui donne

$$(k^2_{p,\rho})_{p_1,\rho_1} = (k^2_{p_1,\rho_1})_{p,\rho}.$$

Si $p = p_1$, il y a deux cas : on peut avoir $\rho_1 = \rho$, et dans ce cas l'échangeabilité est évidente. On peut aussi avoir $\rho_1 = -\rho$: alors on a, pour la première transformation, comme plus haut,

$$a' = ap, \qquad b' \equiv b \pmod a, \qquad b' \equiv -\rho \pmod p):$$

mais, a' étant divisible par p, on doit, pour le passage de ζ' à ζ'', employer l'équation (89) : donc

$$a'' = a, \qquad b'' = b' \equiv b \pmod a.$$

Il s'ensuit $\zeta'' = \zeta + h$, h étant entier; donc

(94) $$(k^2_{p,\rho})_{p,-\rho} = k^2.$$

L'échangeabilité est donc démontrée encore dans ce cas.

Démontrons maintenant l'égalité $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{p,\rho} = \frac{1}{k^2_{p,\rho}}$. En désignant par ζ' la même chose que plus haut, on a (**35**)

$$\zeta = p\zeta' - u, \qquad \text{où} \qquad u \equiv \frac{b+\rho}{a} \pmod p.$$

La transformation linéaire $\begin{pmatrix} 1 & 2p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ change k^2 en $\frac{1}{k^2}$; donc, en désignant par ζ_1 un rapport de périodes elliptiques appartenant à $\frac{1}{k^2}$, on a

$$\zeta = \frac{\zeta_1}{1 - 2p\zeta_1};$$

donc, en faisant

$$a_1\zeta_1^2 + 2b_1\zeta_1 + c_1 = 0,$$

on trouve

$$a_1 = a + 4bp + 4cp^2,$$
$$b_1 = b + 2cp.$$

Soit enfin ζ'_1 le rapport des périodes appartenant à $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{p,\rho}$; on a

$$\zeta_1 = p\zeta'_1 - u_1, \qquad \text{où} \qquad u_1 \equiv \frac{b_1+\rho}{a_1} \equiv \frac{b+\rho}{a} \equiv u \pmod p.$$

En exprimant ζ' en ζ'_1, on trouve

$$\zeta' = \frac{\frac{u-u_1}{p} - 2uu_1 + (1+2pu)\zeta'_1}{1 - 2pu_1 + 2p^2\zeta'_1},$$

relation qui définit une transformation linéaire conduisant de $k^2_{p,\rho}$ à $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{p,\rho}$; comme, de plus, on a

$$2p^2 \equiv 2 \pmod 4,$$

on conclut

$$\left(\frac{1}{k^2}\right)_{p,\rho} = \frac{1}{k^2_{p,\rho}}.$$

Démontrons enfin qu'on a, pour les modules de la seconde espèce et de la première catégorie,

$$(1-k^2)_{p,\rho} = 1 - k^2_{p,\rho}.$$

En conservant la signification des lettres ζ, ζ', u, soit

$$\zeta = -\frac{1}{4\zeta_1}, \qquad \text{d'où} \qquad 4c\zeta_1^2 - 2b\zeta_1 + \frac{a}{4} = 0,$$

de sorte que ζ_1 réponde à $1-k^2$, et soit ζ'_1 le rapport des périodes appartenant à $(1-k^2)_{p,\rho}$. Si maintenant c est premier à p, on a

$$\zeta_1 = p\zeta'_1 - u_1, \qquad \text{où} \qquad u_1 \equiv \frac{-b+\rho}{4c} \pmod p:$$

on en tire, en remarquant que $4uu_1 \equiv -1 \pmod p$,

$$\zeta' = \frac{\frac{1+4uu_1}{p} - 4u\zeta'_1}{4u_1 - 4p\zeta'_1}.$$

Or, cette équation définit une transformation du quatrième degré et du cas Ia(**15**) : donc on a

$$(1-k^2)_{p.\rho} = 1 - k^2_{p.\rho}.$$

Si c est divisible par p, on a

$$\rho = \pm b.$$

Avec le signe supérieur, on a

$$u = \frac{2b}{a}, \qquad u_1 = -\frac{a}{8b};$$

donc $4uu_1 = -1$, comme plus haut. Avec le signe inférieur, on a

$$u = 0, \qquad \zeta = p\zeta', \qquad \zeta_1 = \frac{\zeta'_1}{p},$$

et par conséquent $\zeta' = -\frac{1}{4\zeta'_1}$, ce qui donne encore

$$(1-k^2)_{p.\rho} = 1 - k^2_{p.\rho}.$$

Ce n'est qu'en traitant les équations de la première catégorie d'un déterminant de la forme $-(4h+3)$ qu'il est nécessaire d'employer les fonctions $\frac{1}{k^2}$, $1-k^2$. Or, dans ce cas, l'équation $\Phi(k^2) = 0$ se décompose par l'adjonction de $i\sqrt{D}$ en deux autres $\Phi_1(k^2, i\sqrt{D}) = 0$, $\Phi_1(k^2, -i\sqrt{D}) = 0$; les fonctions $\frac{1}{k^2}$, $1-k^2$ servent à exprimer les racines de l'une de ces équations par celles de l'autre; les fonctions $\varphi_{p.\rho}$ suffisent pour exprimer les racines de chacune d'elles, les unes par les autres.

37. Désignons par $S_{p.\rho}$ la substitution qu'on obtient en remplaçant chaque racine k^2_j de l'équation $\Phi(k^2) = 0$ par la racine $\varphi_{p.\rho}(k^2_j, i\sqrt{D})$.

L'ensemble des substitutions renfermées dans l'expression

$$S^m_{p.\rho} . S^{m_1}_{p_1.\rho_1} . S^{m_2}_{p_2.\rho_2} \ldots$$

forme évidemment un groupe G, dont l'ordre est égal au degré de l'équation, à moins qu'elle n'appartienne à la première catégorie et à un déterminant de la forme $-(4h+3)$; dans ce cas, l'ordre du groupe G

est égal à la moitié du degré de l'équation. Après l'adjonction de $i\sqrt{D}$, le groupe de l'équation est contenu dans G. En effet, posons

$$k_j^2 = \theta_j(k_0^2),$$

les fonctions rationnelles θ_j étant choisies parmi celles qu'on obtient par le procédé du nº **35**; si une substitution T du groupe de l'équation remplace k_0^2 par $\theta_p(k_0^2)$, elle remplacera k_j^2 par $\theta_j[\theta_p(k_0^2)]$ ou, ce qui est la même chose (**36**), par $\theta_p(k_j^2)$; par suite, la substitution T appartient au groupe G.

De l'équation (94) on tire

$$S_{p,\rho} = S_{p,-\rho}^{-1};$$

en supposant que p divise D, on a

$$\rho \equiv 0 \pmod{p},$$

donc

$$S_{p,0} = S_{p,0}^{-1}, \qquad S_{p,0}^2 = 1.$$

Cherchons l'ordre de $S_{p,\rho}$. En faisant subir au module k la substitution $S_{p,\rho}^m$, on obtient un module k_m qui, en supposant a premier à p, est défini par l'équation

$$ap^m\zeta_m^2 + 2b_m\zeta_m + c_m = 0,$$

où

$$b_m^2 \equiv -D \pmod{ap^m},$$

$$b_m \equiv b \pmod{a},$$

$$b_m \equiv -\rho \pmod{p},$$

congruences qui déterminent b_m aux multiples de ap^m près. Pour que $S_{p,\rho}^m$ soit la substitution identique, il faut et il suffit que $k_m^2 = k^2$, c'est-à-dire qu'il soit possible de trouver quatre entiers r, s, r', s' satisfaisant aux équations

$$rs' - r's = 1,$$

$$ap^m = as'^2 + 2bss' + cs^2,$$

$$b_m = b + ar's' + 2br's + crs.$$

s étant divisible par 4. Si l'on avait

$$s \equiv 2 \pmod 4,$$

on aurait

$$k_m^2 = \frac{1}{k^2}$$

et, si s était impair,

$$k_m^2 = \left(\frac{1 + i^t\sqrt{k}}{1 - i^t\sqrt{k}}\right)^4.$$

De ces équations on tire

$$2bss' + cs^2 \equiv 0,$$

$$2br's + crs \equiv 0 \pmod a;$$

d'où

$$2bs \equiv 0, \qquad cs \equiv 0 \pmod a.$$

S'il s'agit de la première espèce, a, $2b$, c n'ont pas de diviseur commun : donc on a

$$s \equiv 0 \pmod a;$$

en faisant

$$s = ya,$$

on trouve

$$p^m = s'^2 + 2bs'y + acy^2 = (s' + by)^2 + \mathrm{D}y^2,$$

y et $s' + by$ étant premiers entre eux.

Au contraire, s'il s'agit de la seconde espèce, on peut seulement conclure que s est divisible par $\frac{a}{2}$; en faisant alors

$$s = \frac{a}{2}y,$$

on a

$$4p^m = 4s'^2 + 4bs'y + acy^2 = (2s' + by)^2 + \mathrm{D}y^2,$$

y et $2s' + by$ ne pouvant avoir un autre diviseur commun que 2.

Si $\mathrm{D} = 8h - 1$, y ne peut être impair, car l'équation donnerait

$$4p^m \equiv 0 \pmod 8,$$

ce qui est absurde; si $\mathrm{D} = 8h + 3$, $\frac{a}{2}$ est impair et, par suite, y pair.

Donc, en faisant pour la seconde espèce $y = 2\eta$, on a

$$p^m = (s' + b\eta)^2 + D\eta^2,$$

comme pour la première. Pour que $S_{p,\rho}$ soit de l'ordre m, il faut donc que p^m puisse être représenté par la forme principale en nombres premiers entre eux.

Supposons que cette condition soit remplie et qu'on ait

$$p^m = x^2 + y^2 D,$$

x et y étant premiers entre eux. En faisant

$$s = ay, \qquad s' = x - by,$$

on a

$$p^m = s'^2 + 2bs'y + acy^2;$$

s et s' seront premiers entre eux; en effet, un diviseur de y ne peut diviser s', et, si un diviseur de a divisait s', il diviserait p^m, ce qui est contre l'hypothèse. Donc, il est possible de choisir les nombres r, r' de manière à rendre $rs' - r's$ égal à 1. Cela posé, on a

$$ap^m = as'^2 + 2bs's + cs^2,$$

et, en faisant

$$b' = b + ar's' + 2br's + crs,$$

on a, de plus,

$$b'^2 \equiv -D \quad (\operatorname{mod} ap^m),$$
$$b' \equiv b \quad (\operatorname{mod} a),$$
$$b' \equiv \pm\rho \quad (\operatorname{mod} p).$$

En supposant qu'on ait

$$b' \equiv -\rho \quad (\operatorname{mod} p),$$

on en conclut

$$b' \equiv b_m \quad (\operatorname{mod} ap^m),$$

de sorte que le carré du module défini par l'équation

$$ap^m\zeta'^2 + 2b'\zeta' + \frac{D + b'^2}{ap^m} = 0$$

est égal à k_m^2; donc, k_m appartient à la même classe de formes que k, et

si de plus ay est divisible par 4, on a

$$k_m^2 = k^2, \qquad S_{p,\rho}^m = 1.$$

Si l'on a

$$b' = +\rho,$$

on a évidemment

$$S_{p,-\rho}^m = 1,$$

ce qui entraîne $S_{p,\rho}^m = 1$.

On trouve des considérations parfaitement analogues dans le Mémoire du P. Joubert (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. L).

De l'analyse précédente, on déduit ces règles : en désignant respectivement par m, m_1, m_2 les exposants des plus petites puissances de p qui puissent être représentées par les formes $x^2 + Dy^2$, $x^2 + 4Dy^2$, $x^2 + 16Dy^2$, l'ordre de la substitution $S_{p,\rho}$ est égal à m pour les équations de la première catégorie, si $D = 4h - 1$ ou $= 4h$; il est égal à m_1 pour les équations de la première catégorie, si $D = 4h + 1$ ou $= 4h + 2$, et pour les équations de la seconde espèce et de la seconde catégorie; enfin il est égal à m_2 pour les équations de la première espèce et de la seconde catégorie.

Supposons que, D étant de la forme $8h + 3$, on ait

$$4p^n = x^2 + y^2 D,$$

x et y étant impairs, et que n soit le plus petit exposant pour lequel cette équation puisse être résolue. Alors $S_{p,\rho}^n$ est, pour l'équation de la seconde espèce, la plus petite puissance de $S_{p,\rho}$ qui remplace chaque module par un autre appartenant à la même classe de formes. Or on a

$$p^{3n} = \left(\frac{x^3 - 3xy^2 D}{8}\right)^2 + \left(\frac{3x^2 y - y^3 D}{8}\right)^2 D.$$

On en conclut que $S_{p,\rho}$ est de l'ordre $3n$ si, pour $D = 16h' + 3$, on a

$$x^2 \equiv y^2 \pmod{16},$$

et si, pour $D = 16h' + 11$, on a

$$x^2 \equiv 9y^2 \pmod{16}.$$

Dans les cas contraires, $S_{p,\rho}$ est évidemment de l'ordre $6n$.

On peut aussi conclure de ce qui précède que $S_{p,0}$ est de l'ordre 2, à moins qu'on n'ait

$$p = D = 4h - 1$$

et que l'équation appartienne à la première catégorie.

38. Nous considérerons, dans les numéros suivants, la décomposition des équations des modules singuliers en équations partielles correspondant aux divers genres de formes quadratiques. Soit, comme plus haut, $\Phi(k^2) = 0$ une des équations appartenant au déterminant $-D$, k_1^2 une de ses racines que nous supposerons définie par les équations

$$i\sqrt{D}.2\omega_1 = \quad b_1.2\omega_1 + a_1\omega_1',$$
$$i\sqrt{D} \quad \omega_1' = - c_1.2\omega_1 - b_1\omega_1';$$

d'où

$$a_1\zeta_1^2 + 2b_1\zeta_1 + c_1 = 0.$$

Soit, de plus, p un nombre premier impair, diviseur de D, et désignons par $l_{1,\infty}$, $l_{1,0}$, $l_{1,1}$, ..., $l_{1,p-1}$ les modules qu'on déduit de k_1 par les transformations principales du degré $p+1$, $l_{1,\frac{y}{x}}$ étant celui qu'on obtient par la division de la période $(x + yi\sqrt{D})\varpi$ (n° **30**). Nous supposerons enfin que a_1 soit premier à p, ce qui est permis, de sorte que nous pouvons faire $\varpi = 2\omega_1$. Cela posé, considérons, en suivant la voie indiquée par M. Kronecker dans sa célèbre Communication de 1862, le produit Δ_1 des différences des $l_{1,m}^2$, formé d'une manière déterminée, par exemple la suivante :

$$\begin{aligned}\Delta_1 = \quad & (l_{1,\infty}^2 - l_{1,0}^2)(l_{1,\infty}^2 - l_{1,1}^2)\ldots(l_{1,\infty}^2 - l_{1,p-1}^2),\\ \times & (l_{1,0}^2 - l_{1,1}^2)(l_{1,1}^2 - l_{1,2}^2)\ldots(l_{1,p-1}^2 - l_{1,0}^2),\\ \times & (l_{1,0}^2 - l_{1,2}^2)(l_{1,1}^2 - l_{1,3}^2)\ldots(l_{1,p-1}^2 - l_{1,1}^2),\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \times & \left(l_{1,0}^2 - l_{1,\frac{p-1}{2}}^2\right)\left(l_{1,1}^2 - l_{1,\frac{p+1}{2}}^2\right)\cdots\left(l_{1,p-1}^2 - l_{1,\frac{p-3}{2}}^2\right).\end{aligned}$$

Plus loin, on verra que la valeur de Δ_1 est indépendante des coefficients a_1, b_1, c_1, le carré du module primitif k_1^2 étant déterminé. On

sait que Δ_1 n'est pas altéré par une substitution linéaire

$$\left| u \quad \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta} \right|$$

relative aux seconds indices, pourvu que $\alpha\delta - \beta\gamma$ soit un résidu quadratique de p, mais qu'il se change en $-\Delta_1$ dans le cas contraire. Or, d'après le n° **32** B, le groupe G′ contient les substitutions $|u \quad u+\beta|$, et le groupe H′ en outre les substitutions $|u \quad -u+\beta|$; donc Δ_1 est invariable par les substitutions de G′, et si $p \equiv 1 \pmod 4$, il l'est aussi par les substitutions de H′; au contraire, si $p \equiv -1 \pmod 4$, la substitution $|u \quad -u|$ change Δ_1 en $-\Delta_1$.

Dans le premier cas, Δ_1 s'exprime en fonction rationnelle et entière de k_1^2. Dans le second, il s'exprime en fonction entière de k_1^2 et de $i\sqrt{D}$; or, puisque la valeur qu'induit Δ_1 par la substitution $|u \quad -u|$ se déduit de la valeur primitive en changeant le signe de $i\sqrt{D}$, on conclut que Δ_1 est égal à une fonction entière de k^2 multipliée par $i\sqrt{D}$. Nous pouvons donc écrire

$$\Delta_1 = \psi(k_1^2), \qquad \text{si } p \equiv 1 \pmod 4,$$
$$\Delta_1 = i\sqrt{D}\,\psi(k_1^2), \qquad \text{si } p \equiv -1 \pmod 4.$$

On se rappelle que, pour un nombre p donné, la fonction $\psi(k^2)$ est identiquement la même pour toutes les racines de l'équation

$$\Phi(k^2) = 0.$$

En désignant par k^2 un module *indéterminé*, par Δ le produit des différences des racines $l_\infty^2, l_0^2, l_1^2, \ldots, l_{p-1}^2$ de l'équation modulaire du degré $p+1$, on a

$$\Delta = \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}\,\chi(k^2),$$

χ dénotant une fonction entière. Pour faire coïncider Δ avec Δ_1 pour $k^2 = k_1^2$, nous supposerons que Δ dépende de $l_\infty^2, l_0^2, \ldots, l_{p-1}^2$ de la même manière que Δ_1 dépend des $l_{1,\infty}^2, l_{1,0}^2, \ldots, l_{1,p-1}^2$, et que l_∞ désigne le module obtenu par la division de la période $b_1.2\omega + a_1\omega'$, l_u celui qui

répond à $(1 + b_1 u) 2\omega + a_1 u\omega'$. On a donc

$$(95)\quad \begin{cases} \psi(k_1^2) = \sqrt{p}\,\chi(k_1^2), & \text{si } p \equiv 1 \pmod 4, \\ \psi(k_1^2) = \sqrt{\dfrac{p}{D}}\,\chi(k_1^2), & \text{si } p \equiv -1 \pmod 4. \end{cases}$$

Soit maintenant k_2^2 une autre racine de l'équation $\Phi(k^2) = 0$ déterminée par l'équation

$$a_2 \zeta_2^2 + 2 b_2 \zeta_2 + c_2 = 0,$$

a_2 étant premier à p, et soient $l_{2,u}$, Δ_2 les quantités qui correspondent à $l_{1,u}$, Δ_1 ; nous avons

$$\Delta_2 = \psi(k_2^2), \qquad \text{si } p \equiv 1 \pmod 4,$$

$$\Delta_2 = i\sqrt{D}\,\psi(k_2^2), \qquad \text{si } p \equiv -1 \pmod 4.$$

D'autre côté, faisons varier ζ de ζ_1 à ζ_2, et appelons Δ', l'_u les valeurs de Δ et de l_u pour $\zeta = \zeta_2$; nous avons ainsi

$$\Delta' = \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}\,\chi(k_2^2).$$

Puisque les l'_u coïncident, à l'ordre près, avec les $l_{2,u}$, on a

$$\Delta' = \pm \Delta_2.$$

Pour déterminer le signe, remarquons qu'en faisant $\zeta = \zeta_2$, 2ω et ω' deviennent respectivement $2\omega_2$ et ω'_2 ; donc l'_u correspond à la période $(1 + b_1 u) 2\omega_2 + a_1 u \omega'_2$, tandis que $l_{2,u}$ correspond à

$$(1 + u b_2) 2\omega_2 + a_2 u \omega'_2 ;$$

donc, en faisant $l'_{u'} = l_{2,u}$, on a

$$u' \equiv \frac{a_2 u}{(a_1 b_2 - a_2 b_1) u + a_1} \pmod p.$$

Ainsi, Δ' se déduisant de Δ_2 par une substitution linéaire sur les $l_{2,u}$, dont le déterminant est $a_1 a_2$, on a

$$\Delta' = \Delta_2 \qquad \text{ou} \qquad \Delta' = -\Delta_2,$$

suivant que $a_1 a_2$ est résidu quadratique de p ou non. Dans le cas spécial où k_2^2 coïncide avec k_1^2, $a_1 a_2$ est résidu, les deux formes (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) étant proprement équivalentes; donc, k_1^2 étant déterminé, la valeur de Δ_1 est indépendante du choix des coefficients a_1, b_1, c_1, comme nous l'avons dit. En général, on trouve

$$(96)\quad \begin{cases} \psi(k_2^2) = \left(\dfrac{a_1 a_2}{p}\right)\sqrt{p}\,\chi(k_2^2), & \text{si } p \equiv 1 \pmod 4, \\ \psi(k_2^2) = \left(\dfrac{a_1 a_2}{p}\right)\sqrt{\dfrac{p}{D}}\,\chi(k_2^2), & \text{si } p \equiv -1 \pmod 4, \end{cases}$$

$\left(\dfrac{a_1 a_2}{p}\right)$ étant le symbole de Legendre.

Avant de faire usage des équations (95), (96), il faut démontrer que leurs deux membres ne s'annulent pas séparément, ce qui ne présente pas de difficulté. En effet, si l'on avait $\Delta_1 = 0$, deux racines $l_1'^2$, $l_1''^2$ de l'équation modulaire seraient égales; en désignant par ζ_1', ζ_1'' les valeurs de ζ qui correspondent, on aurait

$$\zeta_1 = p\zeta_1' + m' = p\zeta_1'' + m''$$

ou

$$\zeta_1 = p\zeta_1' + m' = \frac{\zeta_1''}{p};$$

on en tire respectivement

$$\zeta_1'' = \frac{p\zeta_1' + m' - m''}{p} \qquad \text{ou} \qquad \zeta_1'' = p^2\zeta_1' + pm',$$

d'où l'on peut conclure que le module l_1' admettrait une multiplication complexe du degré p^2. Or, l_1' appartenant nécessairement au déterminant $-p^2 D$, on aurait l'une des deux équations

$$p^2 = x^2 + y^2 p^2 D, \qquad 4p^2 = x^2 + y^2 p^2 D,$$

y n'étant pas zéro; mais ces équations sont impossibles, à moins qu'on n'ait

$$D = 1 \qquad \text{ou} \qquad D = 3,$$

deux cas dont nous n'aurons pas à nous occuper.

En supposant que p soit $\equiv 1 \pmod 4$, on voit que toute racine de

l'équation $\Phi(k^2) = 0$ satisfait à l'une des équations

$$\psi(k^2) = \sqrt{p}\,\chi(k^2) \qquad \text{ou} \qquad \psi(k^2) = -\sqrt{p}\,\chi(k^2).$$

Désignons par

$$F(k^2, \sqrt{p})$$

le plus grand commun diviseur des polynômes $\Phi(k^2)$ et

$$\psi(k^2) - \sqrt{p}\,\chi(k^2);$$

alors $F(k^2, -\sqrt{p})$ sera le plus grand commun diviseur de $\Phi(k^2)$ et de $\psi(k^2) + \sqrt{p}\,\chi(k^2)$, et puisque l'équation des modules singuliers n'a pas de racines doubles ou multiples, on a

$$(97) \qquad \Phi(k^2) = F(k^2, \sqrt{p})\,F(k^2, -\sqrt{p});$$

de plus, on voit que les racines se distribuent entre les deux facteurs du second membre d'après les valeurs de $\left(\frac{a_1}{p}\right)$, en d'autres termes, suivant le caractère relatif au module p que possède la forme quadratique correspondante. Pour abréger, nous attribuerons dans la suite ce caractère au module lui-même.

Pareillement, si $p \equiv -1 \pmod 4$, et que $\frac{p}{D}$ ne soit pas un carré parfait, on trouve

$$(98) \qquad \Phi(k^2) = F\left(k^2, \sqrt{\frac{p}{D}}\right) F\left(k^2, -\sqrt{\frac{p}{D}}\right),$$

les modules se groupant suivant leurs caractères $(\bmod p)$. Dans le cas où D est un carré parfait, cette formule peut être remplacée par (97).

On a vu, au n° **22**, que si D n'est pas un carré, $\Phi(k^2)$ se décompose en deux facteurs par l'adjonction de $\sqrt{D}$ ou de $i\sqrt{D}$. Supposons d'abord que la première décomposition ait lieu, et faisons

$$\Phi(k^2) = \Phi_1(k^2, \sqrt{D})\,\Phi_1(k^2, -\sqrt{D});$$

si maintenant $p \equiv 1 \pmod 4$, on a en même temps l'équation (97); il s'ensuit évidemment qu'à l'exception des cas où $D = p$, $\Phi_1(k^2, \sqrt{D})$

se décompose par l'adjonction de $\sqrt{p}$ en deux facteurs, de sorte qu'on a

$$\Phi_1(k^2, \sqrt{D}) = f(k^2, \sqrt{p}, \sqrt{D}) f(k^2, -\sqrt{p}, \sqrt{D}),$$
$$F(k^2, \sqrt{p}) = f(k^2, \sqrt{p}, \sqrt{D}) f(k^2, \sqrt{p}, -\sqrt{D}).$$

Ainsi $\Phi(k^2)$ est décomposé en quatre facteurs $f(k^2, \pm\sqrt{p}, \pm\sqrt{D})$, de manière que les racines de $f(k^2, \pm\sqrt{D}, \sqrt{p}) = 0$ possèdent le même caractère (mod p), celles de $f(k^2, \pm\sqrt{D}, -\sqrt{p}) = 0$, le caractère opposé.

Si $p \equiv -1 \pmod 4$, l'équation (97) est remplacée par (98); on aura, pourvu que $\frac{D}{p}$ ne soit pas un carré,

$$\Phi_1(k^2, \sqrt{D}) = f(k^2, \sqrt{p}, \sqrt{D}) f(k^2, -\sqrt{p}, \sqrt{D});$$
$$F\left(k^2, \sqrt{\frac{p}{D}}\right) = f(k^2, \sqrt{p}, \sqrt{D}) f(k^2, -\sqrt{p}, -\sqrt{D}).$$

Donc $\Phi(k^2)$ est encore décomposé en quatre facteurs, mais ici les racines des équations

$$f(k^2, \sqrt{p}, \sqrt{D}) = 0, \qquad f(k^2, -\sqrt{p}, -\sqrt{D}) = 0$$

possèdent le même caractère, celle des autres le caractère opposé.

Dans les cas où la décomposition par $i\sqrt{D}$ a lieu, on a

$$\Phi(k^2) = \Phi_1(k^2, i\sqrt{D}) \Phi_1(k^2, -i\sqrt{D}),$$

et, si $p \equiv 1 \pmod 4$:

$$\Phi_1(k^2, i\sqrt{D}) = f(k^2, \sqrt{p}, i\sqrt{D}) f(k^2, -\sqrt{p}, i\sqrt{D}),$$
$$F(k^2, \sqrt{p}) = f(k^2, \sqrt{p}, i\sqrt{D}) f(k^2, \sqrt{p}, -i\sqrt{D});$$

si $p = -1 \pmod 4$,

$$\Phi_1(k^2, i\sqrt{D}) = f(k^2, i\sqrt{p}, i\sqrt{D}) f(k^2, -i\sqrt{p}, i\sqrt{D}),$$
$$F\left(k^2, \sqrt{\frac{p}{D}}\right) = f(k^2, i\sqrt{p}, i\sqrt{D}) f(k^2, -i\sqrt{p}, -i\sqrt{D});$$

d'où l'on tire des conclusions analogues à l'égard des caractères propres aux racines des quatre équations partielles.

39. Soit maintenant $D = m^2 D'$, m^2 étant le plus grand carré divisant D, et désignons par $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ les nombres premiers impairs qui divisent D; dans les cas où $D' > 2$, nous supposons que p_μ soit un diviseur de D'. Choisissons de plus pour chaque module singulier l'équation $a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0$, de telle manière qu'on puisse reconnaître l'ensemble des caractères du module par l'un des coefficients extérieurs; ce sera c ou a qui servira de nombre caractéristique, suivant que le module appartient à la première ou à la seconde catégorie. Cela posé, étudions la décomposition du polynôme $\Phi(k^2)$ par l'adjonction simultanée des radicaux $\sqrt{\pm p_1}, \sqrt{\pm p_2}, \ldots, \sqrt{\pm p_\mu}$. Il faudra pour cela distinguer plusieurs cas.

Soit d'abord $D = 4h + 1$. Si $D' > 1$, on a

$$\Phi(k^2) = \Phi_1(k^2, \sqrt{D})\,\Phi_1(k^2, -\sqrt{D});$$

d'après le n° **22**, on peut supposer que, pour les modules qui appartiennent au premier facteur, on ait $c \equiv 1$ ou $a \equiv 1 \pmod 4$, ou bien, en faisant usage de l'expression de Gauss, que les modules qui possèdent le caractère $(1, 4)$ appartiennent au premier facteur, ceux qui ont le caractère $(3, 4)$ au second. A son tour le polynôme $\Phi_1(k^2, \sqrt{D})$ admet une décomposition relative à chacun des radicaux $\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_\mu}$:

$$\begin{aligned}\Phi_1(k^2, \sqrt{D}) &= f_1(k^2, \sqrt{p_1}, \sqrt{D})\, f_1(k^2, -\sqrt{p_1}, \sqrt{D}) = \ldots \\ &= f_{\mu-1}(k^2, \sqrt{p_{\mu-1}}, \sqrt{D})\, f_{\mu-1}(k^2, -\sqrt{p_{\mu-1}}, \sqrt{D}).\end{aligned}$$

On en conclut que $\Phi_1(k^2, \sqrt{D}) = 0$ se décompose en $2^{\mu-1}$ équations partielles de la forme

$$f(k^2, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_{\mu-1}}, \sqrt{D}) = 0, \tag{99}$$

où le premier membre est le plus grand commun diviseur de

$$f_1(k^2, \sqrt{p_1}, \sqrt{D}), \quad f_2(k^2, \sqrt{p_2}, \sqrt{D}), \quad \ldots, \quad f_{\mu-1}(k^2, \sqrt{p_{\mu-1}}, \sqrt{D}).$$

Si, dans l'équation (99), on change le signe de l'un des radicaux

$\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{\mu-1}}$, par exemple celui de $\sqrt{p_1}$, en conservant les autres signes, on obtient une nouvelle équation, dont les racines ont conservé les caractères relatifs aux modules $p_2, \ldots, p_{\mu-1}$, pendant que leur caractère $(\text{mod}\ p_1)$ est changé. Par cela le caractère $(\text{mod}\ p_\mu)$ est changé ou conservé, suivant que p_1 divise D' ou non. En mettant l'équation (99) sous la forme

$$(100) \qquad \varphi(k^2, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_\mu}) = 0,$$

la nouvelle équation sera

$$\varphi(k^2, -\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_{\mu-1}}, \mp\sqrt{p_\mu}) = 0,$$

où évidemment il faut prendre le signe supérieur si p_1 divise D', l'inférieur dans le cas contraire. Donc le signe de $\sqrt{p_\mu}$ doit aussi être déterminé suivant le caractère que possèdent les racines de la nouvelle équation par rapport au module p_μ. L'équation $\Phi_1(k^2, -\sqrt{D}) = 0$ se décompose de la même manière; si dans une de ses équations partielles on veut avoir les mêmes caractères $(\text{mod}\ p_1), \ldots, (\text{mod}\ p_{\mu-1})$ que dans l'équation (99), le caractère $(\text{mod}\ p_\mu)$ sera changé; en vertu de ce qui a été dit au numéro précédent, on a ainsi l'équation

$$f'\left[k^2, (-1)^{\frac{1}{2}(p_1-1)}\sqrt{p_1}, (-1)^{\frac{1}{2}(p_2-1)}\sqrt{p_2}, \ldots, (-1)^{\frac{1}{2}(p_{\mu-1}-1)}\sqrt{p_{\mu-1}}, -\sqrt{D}\right] = 0$$

ou bien

$$\varphi\left[k^2, (-1)^{\frac{1}{2}(p_1-1)}\sqrt{p_1}, (-1)^{\frac{1}{2}(p_2-1)}\sqrt{p_2}, \ldots, (-1)^{\frac{1}{2}(p_{\mu-1}-1)}\sqrt{p_{\mu-1}}, -(-1)^{\frac{1}{2}(p_\mu-1)}\sqrt{p_\mu}\right] = 0;$$

on démontre la dernière équation en remarquant que les diviseurs premiers de D' qui sont de la forme $4h-1$ sont en nombre pair. L'équation $\Phi(k^2) = 0$ est ainsi décomposée en 2^μ équations partielles du même degré, répondant chacune à un genre déterminé de formes quadratiques du déterminant $-D$. Supposons que l'équation proposée soit de la première catégorie, et déterminons les signes des radicaux $\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_\mu}$ de telle manière que l'équation (100) réponde au genre principal; on en déduit l'équation partielle satisfaite par le module défini par la relation $a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0$, en changeant $\sqrt{p_r}$ en $\left(\frac{c}{p_r}\right)\sqrt{p_r}$.

quand $c \equiv 1 \pmod 4$; en $(-1)^{\frac{1}{2}(p_r-1)}\left(\frac{c}{p_r}\right)\sqrt{p_r}$, quand $c \equiv -1 \pmod 4$, c'est-à-dire qu'on obtient l'équation partielle cherchée en remplaçant $\sqrt{p_r}$ par $\left(\frac{p_r}{c}\right)\sqrt{p_r}$. S'il s'agit d'une équation de la seconde catégorie, c doit être remplacé par a. C'est la règle indiquée par M. Kronecker, à l'occasion des déterminants -21, -105; il faut pourtant remarquer que la classification des modules singuliers que nous avons adoptée ne coïncide pas avec celle de M. Kronecker. Ces résultats sont encore valables si $D' = 1$; en effet, on trouve dans ce cas l'équation (100) par décomposition immédiate de $\Phi(k^2) = 0$, et il n'existe pas de genre ayant le caractère (3, 4).

Supposons $D = 4h - 1$. On a aussi $D' \equiv -1 \pmod 4$ et, par suite, D' contient au moins un diviseur premier de la forme $(4h-1)$; nous pouvons donc supposer $p_\mu \equiv -1 \pmod 4$. Pour écrire plus simplement les formules, nous poserons

$$p_1 \equiv p_2 \equiv \ldots \equiv p_\lambda \equiv 1, \qquad p_{\lambda+1} \equiv p_{\lambda+2} \equiv \ldots \equiv p_\mu \equiv -1 \pmod 4.$$

Considérons d'abord les équations de la première espèce et de la première catégorie. L'équation $\Phi(k^2) = 0$ se décompose en deux autres $\Phi_1(k^2, i\sqrt{D}) = 0$ et $\Phi_1(k^2, -i\sqrt{D}) = 0$, où il est permis de supposer que les modules pour lesquels le coefficient b est congru à $1 \pmod 4$ satisfassent à la première, les autres à la seconde équation (n° **22**). Chacune de ces équations se décompose de nouveau comme dans le cas précédent; en désignant par

$$(101) \qquad \varphi(k^2, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_\lambda}, i\sqrt{p_{\lambda+1}}, \ldots, i\sqrt{p_\mu}) = 0,$$

l'une des équations partielles provenant de la première, celle-ci

$$(102) \quad \varphi(k^2, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_\lambda}, -i\sqrt{p_{\lambda+1}}, \ldots, -i\sqrt{p_\mu}) = 0$$

appartient à la seconde; les racines de ces deux équations partielles présentent le même ensemble de caractères et répondent, par suite, à un même genre de formes; les racines de l'une sont les réciproques de celles de l'autre (n° **22**). Quand D est de la forme $8h+3$, il y a aussi une autre relation entre les racines des deux équations; en effet, si l'on

fait $\zeta = -\frac{1}{4\zeta'}$, ce qui donne le module transformé k', on a

$$4c\zeta'^2 - 2b\zeta' + \frac{a}{4} = 0,$$

où $\frac{a}{4}$ est impair; on en conclut que k' appartient non seulement au même déterminant, à la même espèce et à la même catégorie, mais aussi au même genre. Donc k^2 satisfaisant à (101), k'^2 satisfait à (102); de plus (101) sera satisfaite par k^2, $\frac{1}{k'^2}$, $\frac{-k'^2}{k^2}$; (102) par $\frac{1}{k^2}$, k'^2, $\frac{-k^2}{k'^2}$. Si l'on suppose les radicaux tellement déterminés que l'équation (101) réponde au genre principal, avec $b \equiv 1 \pmod 4$, on en tire celle qui est satisfaite par k^2 en changeant $\sqrt{p_r}$ en $\left(\frac{c}{p_r}\right)\sqrt{p_r}$, i en i^b.

Pour les équations de la première espèce et de la seconde catégorie, les équations (101), (102) sont remplacées par les suivantes

$$(103) \qquad \varphi(k^2, \sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_\lambda}, \quad \sqrt{p_{\lambda+1}}, \ldots, \quad \sqrt{p_\mu}) = 0,$$

$$(104) \qquad \varphi(k^2, \sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_\lambda}, -\sqrt{p_{\lambda+1}}, \ldots, -\sqrt{p_\mu}) = 0,$$

dont la première a lieu si $a \equiv 1$, la seconde si $a \equiv -1 \pmod 4$. Il est facile de voir que les deux équations sont réciproques. Si (103) répond au genre principal, on en déduit l'équation qui est satisfaite par le module k, en remplaçant $\sqrt{p_r}$ par $\left(\frac{p_r}{a}\right)\sqrt{p_r}$.

Dans la première catégorie de la seconde espèce il y a deux équations, dont l'une a lieu pour $a \equiv 0 \pmod 8$, l'autre pour $a \equiv 4 \pmod 8$, les racines de l'une étant les réciproques de celles de l'autre. Chacune de ces équations se décompose comme dans la première catégorie de la première espèce; on a donc deux équations appartenant à chaque genre, définies par les formules (101), (102). Si $a \equiv 0 \pmod 8$, les racines de l'une sont les compléments de celles de l'autre. En partant des équations qui répondent au genre contenant la forme $\left(\frac{D+1}{2}, 1, 2\right)$, la règle des signes est évidemment aussi la même que dans la première catégorie de la première espèce, en y remplaçant c par $\frac{1}{2}c$.

Dans la seconde catégorie de la seconde espèce, on a

$$a \equiv 2 \pmod 4.$$

On a, pour chaque genre de formes, deux équations définies par les formules (103), (104), dont la première répond à $\frac{a}{2} \equiv 1 \pmod 4$, la seconde à $\left(\frac{a}{2}\right) \equiv 3$, les racines de l'une étant les réciproques de celle de l'autre (n° **22**). En partant de l'équation qui répond au genre contenant la forme $\left(2, 1, \frac{D+1}{2}\right)$, la règle des signes est la même que pour la seconde catégorie de la première espèce, en remplaçant seulement a par $\frac{a}{2}$.

Soit maintenant $D = 8h \pm 2$. On a

$$\Phi(k^2) = \Phi_1(k^2, \sqrt{D})\,\Phi_1(k^2, -\sqrt{D}).$$

En poursuivant les décompositions comme pour $D = 4h + 1$, on voit que chacun des deux facteurs donne 2^μ équations partielles respectivement des formes

$$(105)\quad \varphi(k^2, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_\lambda}, \quad \sqrt{p_{\lambda+1}}, \ldots, \quad \sqrt{p_\mu}, \quad \sqrt{2}) = 0,$$

$$(106)\quad \varphi(k^2, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_\lambda}, -\sqrt{p_{\lambda+1}}, \ldots, -\sqrt{p_\mu}, \mp\sqrt{2}) = 0,$$

dont (105) a lieu si $c \equiv 1$ pour la première catégorie (en supposant b divisible par 4, *voir* n° **22**), si $a \equiv 1$ pour la seconde, pendant que (106) a lieu dans les cas contraires; le double signe correspond à celui de $8h \pm 2$. Les modules qui satisfont à ces équations ont les mêmes caractères $(\bmod\, p_1)$, $(\bmod\, p_2)$, ..., $(\bmod\, p_\mu)$; or les formes du déterminant $-$ D possèdent en outre un caractère (mod 8), qui est déterminé par les autres caractères, tandis que les valeurs de $(-1)^{\frac{c-1}{2}}$ ou $(-1)^{\frac{a-1}{2}}$ ne le sont pas; donc les équations (105), (106) répondent au même genre de formes. On voit aisément que dans la première catégorie les racines de l'une de ces équations sont les réciproques de celles de l'autre, et que dans la seconde catégorie k^2 et $\frac{1}{k^2}$ satisfont à la même équation. En remarquant qu'on a, pour la première catégorie,

$$\prod \left(\frac{c}{q_r}\right) = (\mp 1)^{\frac{c-1}{2}} (-1)^{\frac{c^2-1}{8}},$$

où q_r doit être égalé à tous les diviseurs premiers impairs de D′, on trouve facilement la règle des signes : l'équation (105) répondant au genre principal, on obtient celle qui est satisfaite par un module k en changeant $\sqrt{p_r}$ en $\left(\frac{p_r}{c}\right)\sqrt{p_r}$, $\sqrt{2}$ en $(-1)^{\frac{c^2-1}{8}}\sqrt{2}$. Pour la seconde catégorie c est remplacé par a.

Si $D = 4(2h+1)$ il y a deux équations appartenant à la première catégorie, une à la seconde. Chacune de ces équations se décompose en 2^μ équations partielles répondant aux 2^μ genres; celles de la seconde catégorie sont réciproques. Quant à la forme des équations partielles et à la règle des signes, tout est comme pour $D = 4h+1$.

Si $D = 2^{2\pi+1}(4h \pm 1)$, où $\pi > 0$, la forme des équations partielles et la règle des signes sont les mêmes que pour $D = 8h \pm 2$. Mais puisque les formes peuvent avoir quatre caractères différents par rapport au module 8 : (1, 8), (3, 8), (5, 8), (7, 8), les deux équations (105), (106) répondent à des genres différents; il n'y a donc qu'une équation partielle pour chaque genre.

Enfin, si $D = 2^{2\pi}(2h+1)$, π surpassant 1, on a la même décomposition et la même règle des signes que pour $D = 4h+1$; mais, comme chaque classe a un caractère par rapport au module 8, qui n'est pas déterminé par les caractères relatifs aux modules $4, p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, chacune des 2^μ équations partielles répond à l'ensemble de deux genres distincts. Dans ces seuls cas la décomposition dont il s'agit ne suffit pas pour séparer les modules appartenant aux divers genres.

40. L'analogie fait présumer qu'il existe, pour les déterminants de la forme $-2^{2\pi}(2h+1)$, une nouvelle décomposition qui sépare complètement les genres, et l'on est porté à croire qu'elle aura lieu par l'adjonction de $\sqrt{2}$. On peut le démontrer par les considérations suivantes, qui éclaircissent en même temps quelques autres points.

Soit k un module quelconque, k_0 celui qu'on en déduit par la transformation principale du degré impair n; on a une équation de la forme

$$F\left[\frac{\sqrt[4]{k_0}}{(\sqrt[4]{k})^n}, k^2\right] = 0$$

ou bien, si $n = 8h + 1$,

$$F_1\left(\frac{\sqrt[4]{k_0}}{\sqrt[4]{k}}, k^2\right) = 0;$$

si $n = 8h + 3$,

$$F_1\left(\frac{1}{k}\sqrt[4]{k_0}\sqrt[4]{k}, k^2\right) = 0;$$

si $n = 8h + 5$,

$$F_1\left(\frac{1}{k}\frac{\sqrt[4]{k_0}}{\sqrt[4]{k}}, k^2\right) = 0;$$

si $n = 8h + 7$,

$$F_1(\sqrt[4]{k_0}\sqrt[4]{k}, k^2) = 0.$$

Pour avoir une équation en $\sqrt{k}$ satisfaite par les modules de la première espèce et de la première catégorie du déterminant impair $-D$, on peut faire $n = D$, et (n^os **10, 11**) $\frac{\sqrt[4]{k_0}}{\sqrt[4]{k}} = \pm\frac{1}{\sqrt{i^{bc}}\sqrt{k}}$, si $n = 8h + 1$ ou $= 8h + 5$; mais $\sqrt[4]{k_0}\sqrt[4]{k} = \pm\sqrt{i^{bc}}\sqrt{k}$, si $n = 8h + 3$ ou $= 8h + 7$. On obtient ainsi deux équations, qui, pour $D = 8h \pm 1$, sont de la forme

$$f(\sqrt{i^{bc}}\sqrt{k}) = 0, \qquad f(-\sqrt{i^{bc}}\sqrt{k}) = 0;$$

pour $D = 8h \pm 3$, de la forme

$$f\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{i^{bc}}}\right) = 0, \qquad f\left(-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{i^{bc}}}\right) = 0$$

ou bien

$$(107) \qquad f\left(\frac{1 \pm i^{bc}}{2}\sqrt{2}\sqrt{k}\right) = 0, \qquad f\left(-\frac{1 \pm i^{bc}}{2}\sqrt{2}\sqrt{k}\right) = 0,$$

où il faut prendre le signe supérieur si $D = 8h \pm 1$, l'inférieur si $D = 8h \pm 3$.

Multipliées membre à membre, ces équations reproduisent les équations en $i^{bc}k$ des n^os **10** et **11**. L'équation modulaire n'étant pas altérée quand on remplace $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k_0}$ par $\frac{1}{\sqrt[4]{k}}$ et $\frac{1}{\sqrt[4]{k_0}}$, il est facile de voir que les modules réciproques satisfont respectivement aux équations

$$f\left(\frac{1 \mp i^{bc}}{2}\sqrt{2}\sqrt{k}\right) = 0, \qquad f\left(-\frac{1 \mp i^{bc}}{2}\sqrt{2}\sqrt{k}\right) = 0.$$

En se servant de l'équation $\Phi(k^2)=0$, on peut débarrasser les équations (107) des racines qui n'appartiennent pas au déterminant $-D$; soient

$$\varphi\left(\frac{1\pm i^{bc}}{2}\sqrt{2}\sqrt{k}\right)=0,\qquad \varphi\left(-\frac{1\pm i^{bc}}{2}\sqrt{2}\sqrt{k}\right)=0$$

les équations ainsi obtenues. En chassant maintenant i, on obtient deux équations nouvelles

$$(108)\qquad \varphi_1(\sqrt{2}\sqrt{k})=0,\qquad \varphi_1(-\sqrt{2}\sqrt{k})=0,$$

qui, multipliées membre à membre, reproduisent l'équation $\Phi(k^2)=0$. Elles sont évidemment réciproques, et d'ailleurs elles n'ont pas de racine commune, de sorte que $\sqrt{2}$ ne peut disparaître; car, si $\sqrt{k}$ satisfaisait aux deux équations, k^2 serait racine double de l'équation $\Phi(k^2)=0$, ce qui n'a pas lieu. En désignant par m le degré du polynôme Φ, celui de φ_1 est évidemment $2m$.

Par exemple, pour $D=3$ et $D=5$, on a, en écrivant z au lieu de $\sqrt{k}$,

$$z^4+\sqrt{2}z^3+z^2+\sqrt{2}z+1=0,$$

$$z^8-2\sqrt{2}z^7+4z^6+6\sqrt{2}z^5+2z^4+6\sqrt{2}z^3+4z^2-2\sqrt{2}z+1=0.$$

Il faut maintenant déterminer le signe du radical $\sqrt{2}$. Pour cela, nous supposons, suivant l'usage, que $\sqrt[4]{k}$ soit généralement défini par la formule

$$\sqrt[4]{k}=\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\prod_1^\infty\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}},\qquad \text{où}\qquad \sqrt[8]{q}=e^{\frac{1}{4}\pi i\zeta}.$$

Sans nuire à la généralité, nous pouvons, de plus, supposer que les coefficients a des équations $a\zeta^2+2b\zeta+c=0$ soient premiers à D; sous cette hypothèse, le rapport des périodes qui répond à la racine $\sqrt[4]{k_0}$ de l'équation modulaire dont nous sommes partis est $\frac{t+\zeta}{D}$, où nous pouvons prendre $t\equiv 0 \pmod 8$, puisque t n'est déterminé que par rapport au module D (n° **9**). Les équations (24) deviennent

$$b=r_1,\qquad a=s_1,\qquad -c=-tr_1+Dr'_1,\qquad -b=-ts_1+Ds'_1.$$

Or il résulte des formules de M. Hermite (*Sur la théorie des équations modulaires*, p. 4) que la transformation linéaire $\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_1' & s_1' \end{pmatrix}$ donne

$$\sqrt[4]{k_1} = (-1)^{\frac{1}{8}(s_1'^2-1)} e^{-\frac{1}{4} r_1' s_1' \pi i} \sqrt[4]{k} \qquad \text{si} \quad s_1 \equiv 0 \pmod 4,$$

$$\sqrt[4]{k_1} = (-1)^{\frac{1}{8}(s_1'^2-1)} e^{-\frac{1}{4} r_1' s_1' \pi i} \frac{1}{\sqrt[4]{k}} \qquad \text{si} \quad s_1 \equiv 2.$$

En remplaçant k par k_0, k_1 par k, nous avons donc :

Pour $D = 8h+1,\ 8h+5$ .... $\dfrac{\sqrt[4]{k_0}}{\sqrt[4]{k}} = (-1)^{\frac{1}{8}(s_1'^2-1)} e^{-\frac{1}{4} r_1' s_1' \pi i} \dfrac{1}{\sqrt[4]{k}}$,

Pour $D = 8h+3,\ 8h+7$ .... $\sqrt[4]{k_0}\sqrt[4]{k} = (-1)^{\frac{1}{8}(s_1'^2-1)} e^{\frac{1}{4} r_1' s_1' \pi i} \sqrt[4]{k}$.

Ayant $s_1' \equiv -Db$, $r_1' s_1' \equiv bc \pmod 8$, on trouve

$$(-1)^{\frac{1}{8}(s_1'^2-1)} e^{\mp\frac{1}{4} r_1' s_1' \pi i} = \frac{1 \pm i^{bc}}{2} (-1)^{\frac{1}{8}(D^2-1)+\frac{1}{8}(c^2-1)} \sqrt{2}.$$

On en peut conclure que les valeurs de $\sqrt{k}$ se distribuent entre les deux équations (108) suivant la valeur de l'expression $(-1)^{\frac{1}{8}(c^2-1)}$. Il est, d'ailleurs, facile de voir que ce résultat est indépendant de l'hypothèse faite sur les coefficients a; en effet, si l'on effectue une transformation linéaire $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ne changeant pas $\sqrt{k}$, la valeur nouvelle c_1 de c sera

$$a\gamma^2 + 2b\gamma\alpha + c\alpha^2;$$

or, ayant $\gamma \equiv 0$, $\alpha \equiv \pm 1 \pmod 4$, on a

$$c_1 \equiv c \pmod 8, \qquad \text{d'où} \qquad (-1)^{\frac{1}{8}(c_1^2-1)} = (-1)^{\frac{1}{8}(c^2-1)}.$$

En faisant $\zeta = -\dfrac{1}{\zeta_1}$, $\sqrt{k} = \dfrac{1-\sqrt{k_1}}{1+\sqrt{k_1}}$, on a

$$c\zeta_1^2 - 2b\zeta_1 + a = 0,$$

et, par suite, le module transformé k_1 appartient à la seconde catégorie et à la première espèce. Puisque $\sqrt{k_1}$ se change en $-\sqrt{k_1}$ quand

$\sqrt{k}$ est remplacé par $\frac{1}{\sqrt{k}}$, les équations (108) donnent, en substituant, deux équations en k_1 du degré m

$$\psi(k_1, \sqrt{2}) = 0, \qquad \psi(k_1, -\sqrt{2}) = 0;$$

en changeant le signe de $\sqrt{2}$, celui de $\sqrt{k}$ est aussi changé, et, par suite, k_1 est remplacé par $\frac{1}{k_1}$. En chassant les puissances impaires de k_1, on obtient deux équations en k_1^2 du degré m

$$\psi_1(k_1^2, \sqrt{2}) = 0, \qquad \psi_1(k_1^2, -\sqrt{2}) = 0,$$

qui, multipliées, reproduisent évidemment l'équation $\Phi(k^2) = 0$ relative à la seconde catégorie.

On a ainsi le résultat suivant : L'équation $\Phi(k^2) = 0$ relative à la première espèce et à la seconde catégorie se décompose par l'adjonction de $\sqrt{2}$ en deux équations partielles

$$\psi_1(k^2, \sqrt{2}) = 0, \qquad \psi_1(k^2, -\sqrt{2}) = 0;$$

on peut déterminer la valeur de $\sqrt{2}$ de telle manière que le module défini par l'équation $a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0$ satisfasse à l'équation

$$\psi_1\left[k^2, (-1)^{\frac{1}{8}(a^2-1)}\sqrt{2}\right] = 0,$$

le module réciproque étant racine de l'autre équation.

Le module k étant de la première espèce et de la seconde catégorie, posons

$$\zeta = -\frac{1}{2\zeta_1}, \qquad \text{d'où} \qquad 4c\zeta_1^2 - 4b\zeta_1 + a = 0;$$

alors le module transformé k_1 appartient à la première catégorie et au déterminant $-4D$. Donc, si, dans les équations $\psi(k, \pm\sqrt{2}) = 0$, on fait $k = \frac{1-k_1}{1+k_1}$, on obtient deux équations en k_1

$$\chi(k_1, \pm\sqrt{2}) = 0;$$

d'ailleurs, on a $\chi(k_1, -\sqrt{2}) = \pm\chi(-k_1, \sqrt{2})$, comme on le voit aisément; donc les équations prennent la forme

$$\chi(\pm\sqrt{2}k_1) = 0.$$

Par suite, chacune des deux équations en k^2 de la première catégorie d'un déterminant de la forme $-4(2h+1)$ se décompose en deux équations en k par l'adjonction de $\sqrt{2}$; on peut déterminer la valeur de $\sqrt{2}$ de manière que le module défini par la relation $a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0$ soit racine de l'équation

$$\chi\left[(-1)^{\frac{1}{8}(c^2-1)}\sqrt{2}k\right] = 0.$$

Les décompositions des équations $\Phi(k^2) = 0$ dont nous venons de parler entraînent évidemment des décompositions analogues des équations partielles du numéro précédent.

Considérons enfin les déterminants de la forme $2^{2\pi}(2h+1)$, où $\pi > 1$. Soit, comme plus haut, k un module de la première espèce et de la seconde catégorie du déterminant impair $-D$, défini par l'équation $a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0$ et, par suite, satisfaisant à l'équation

$$\psi_1\left[k^2, (-1)^{\frac{1}{8}(a^2-1)}\sqrt{2}\right] = 0.$$

En faisant $\zeta = -\frac{1}{4\zeta_1}$, ce qui donne $k_1^2 = 1 - k^2$, on a

$$16c\zeta_1^2 - 8b\zeta_1 + a = 0;$$

par conséquent, k_1 appartient au déterminant $-16D$ et à la première des deux équations de la première catégorie. Évidemment, on trouve, de cette manière, toutes les racines de cette équation. Il s'ensuit que, si k est un module de la première catégorie du déterminant $-16D$, racine de la première des deux équations, et défini par l'équation $a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0$, il satisfait à l'équation

$$\psi_1\left[1 - k^2, (-1)^{\frac{1}{8}(c^2-1)}\sqrt{2}\right] = 0.$$

En égalant à zéro le plus grand commun diviseur des premiers membres de cette équation et de l'équation partielle du numéro précédent,

on a une nouvelle équation partielle $\varphi(k^2) = 0$, répondant à un seul genre de formes.

Posons maintenant $\zeta = 2\zeta_1 + t$; on aura

$$4a\zeta_1^2 + 4(b+at)\zeta_1 + at^2 + 2bt + c = 0, \qquad k_1^4 k'^4 = 16 k_1'^2 k^2;$$

le nouveau module k_1 appartient donc au déterminant $-64\mathrm{D}$ et à la première des deux équations de la première catégorie; évidemment, ses caractères sont les mêmes que ceux du module k. En éliminant k^2 entre les équations $\varphi(k^2) = 0$ et $k_1^4 k'^4 = 16 k_1'^2 k^2$, on obtient donc une équation partielle répondant à un seul genre de formes du déterminant $-64\mathrm{D}$. En continuant de la même manière, on finit par trouver les équations partielles qui répondent à un seul genre du déterminant $-2^{2\pi}\mathrm{D}$. On voit que le signe de $\sqrt{2}$ doit être déterminé par la même règle que pour les déterminants de la forme $8h \pm 2$.

La décomposition de la première équation de la première catégorie donne immédiatement celle de la seconde équation. On a aussi une décomposition analogue de l'équation de la seconde catégorie, puisque celle-ci se déduit de l'équation traitée en remplaçant k^2 par $\left(\dfrac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^4$ et chassant le radical et les puissances impaires de k.

La décomposition des équations des modules singuliers fournit évidemment une démonstration de ces deux théorèmes d'Arithmétique : Tous les genres de formes d'un déterminant négatif contiennent le même nombre de classes; le nombre des genres est égal à la moitié du nombre des caractères totaux assignables.

Remarque sur la classification des modules singuliers.

La classification dont nous avons fait usage repose sur la considération de l'équation $a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0$, où ζ est le rapport des périodes elliptiques de la fonction $\lambda(z)$. On peut la remplacer par une autre, qui est, sans doute, celle de M. Kronecker et qui présente à certains égards un avantage, en introduisant, au lieu de ζ, le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ des pé-

riodes des carrés des trois fonctions elliptiques. Faisons, en effet,

$$\rho = \frac{\omega'}{\omega} = 2\zeta, \qquad a\rho^2 + 2b\rho + c = 0, \qquad ac - b^2 = \Delta,$$

et classons les modules d'après les valeurs de Δ. En considérant d'abord l'ordre proprement primitif, on a, comme on le voit sans peine, pour chaque valeur de Δ, trois équations différentes en k^2, toutes du degré $2N$, N étant le nombre des classes proprement primitives du déterminant $-\Delta$. Parmi ces équations, deux correspondent aux valeurs impaires de c; ce sont celles que nous avons appelées les équations de la première catégorie du déterminant -4Δ. La troisième équation correspond aux valeurs paires de c; si Δ a l'une des formes $4h+1$, $4h+2$, c'est l'équation de la première catégorie du déterminant $-\Delta$; si $\Delta = 4h-1$, c'est l'équation de la seconde espèce et de la seconde catégorie du déterminant $-\Delta$; enfin, si $\Delta = 4h$, c'est l'équation de la première espèce et de la seconde catégorie du déterminant $-\frac{1}{4}\Delta$.

Quant à l'ordre improprement primitif, le résultat est différent suivant que $\Delta = 8h-1$ ou $= 8h+3$. Pour $\Delta = 8h-1$, on a trois équations du degré $2N$, savoir les trois équations de la première catégorie du déterminant $-\Delta$. Si, au contraire, $\Delta = 8h+3$, on n'a qu'une seule équation, celle de la première espèce et de la première catégorie du déterminant $-\Delta$; le degré de cette équation est encore $2N$, c'est-à-dire qu'il est égal au sextuple du nombre des classes improprement primitives. Pour $\Delta = 1$, $\Delta = 3$, il y a des exceptions évidentes à l'égard des degrés des équations.

D'après cette classification, les équations qui appartiennent à l'ordre proprement primitif se décomposent en deux équations partielles par l'adjonction de $\sqrt{\Delta}$, pourvu que Δ ne soit pas un carré; celles qui répondent à l'ordre improprement primitif, au contraire, par l'adjonction de $i\sqrt{\Delta}$; de plus, les valeurs réelles de k^2 appartiennent toutes à l'ordre proprement primitif.

Recherches sur les intégrales algébriques de l'équation de Kummer;

PAR M. E. GOURSAT.

Je me suis déjà occupé, dans différents Mémoires, des intégrales rationnelles de l'équation du troisième ordre, introduite par M. Kummer dans la théorie de la transformation des séries hypergéométriques. En particulier, le travail intitulé : *Recherches sur l'équation de Kummer* (*Acta Societatis Fennicæ*. Helsingfors, 1885), qui contient les résultats complets de mes recherches sur ce sujet, donne le tableau de tous les cas où il existe de pareilles intégrales avec une méthode générale pour calculer les coefficients. Depuis la publication de ce Mémoire, M. Erwin Papperitz a étudié, dans son *Habilitationsschrift* (Leipzig, 1886), les intégrales algébriques de la même équation, et établi, pour cet objet, un système d'équations arithmétiques analogue à celui dont je m'étais servi. Je reprends, dans ce travail, l'étude de la même question, en m'efforçant de pousser la solution générale aussi loin que possible.

Il existe une différence essentielle entre les deux systèmes d'équations arithmétiques dont dépendent les transformations rationnelles et les transformations irrationnelles. Dans ce dernier cas, en effet, un système de solutions des équations arithmétiques ne fournit pas *en général* d'intégrale algébrique. J'espère avoir établi d'une façon rigoureuse qu'on peut toujours reconnaître, par un nombre *fini* d'essais et de calculs élémentaires, si à un système de solutions correspond effec-

tivement une intégrale algébrique. Je m'attache surtout au cas particulier où l'inversion du quotient de deux intégrales de l'équation hypergéométrique donne naissance à une fonction uniforme; s'il en est ainsi, cette fonction uniforme sera, comme on sait, une fonction fuchsienne. Le problème peut alors être considéré comme un cas particulier du problème général de la transformation des fonctions fuchsiennes.

L'existence d'une intégrale algébrique étant reconnue, le calcul des coefficients de cette équation est un problème dont la solution générale paraît fort difficile. On peut cependant indiquer des méthodes générales, lorsque la relation est de genre zéro ou de genre un. Les calculs algébriques auxquels on est conduit paraissent, il est vrai, compliqués, mais il est facile de reconnaître qu'on ne peut les éviter. Je me réserve de revenir sur la formation et les propriétés de ces équations.

La dernière partie contient la démonstration d'un théorème général sur les équations linéaires, dont l'application à l'équation de Kummer est immédiate. De ce théorème se déduisent aussi des conséquences intéressantes, que je ne fais que signaler, relatives à la réduction de certaines intégrales abéliennes.

I.

1. Désignons, pour abréger, par $(s)_x$ l'invariant différentiel

$$\frac{\dfrac{d^3 s}{dx^3}}{\dfrac{ds}{dx}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{d^2 s}{dx^2}}{\dfrac{ds}{dx}}\right)^2,$$

et par $R(\lambda, \mu, \nu, x)$ la fonction rationnelle

$$R = \frac{1 - \lambda^2 + (\lambda^2 + \nu^2 - \mu^2 - 1)x + (1 - \nu^2)x^2}{2x^2(1-x)^2};$$

l'équation de Kummer prend la forme suivante :

$$(1) \qquad (x)_y + R(\lambda, \mu, \nu, x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = R(\lambda', \mu', \nu', y).$$

Cette équation se présente, comme on sait, quand on cherche un changement de variable permettant de passer de l'équation hypergéométrique

$$(2)\qquad x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{du}{dx}-\alpha\beta u=0$$

à la nouvelle équation

$$(3)\qquad y(1-y)\frac{d^2v}{dy^2}+[\gamma'-(\alpha'+\beta'+1)y]\frac{dv}{dy}-\alpha'\beta'v=0,$$

où

$$\lambda=1-\gamma,\qquad \mu=\gamma-\alpha-\beta,\qquad \nu=\beta-\alpha,$$
$$\lambda'=1-\gamma',\qquad \mu'=\gamma'-\alpha'-\beta',\qquad \nu'=\beta'-\alpha'.$$

Je me propose de rechercher dans quels cas l'équation (1) admet une intégrale algébrique définie par l'équation entière *irréductible*

$$(4)\qquad f(x,y)=0;$$

je suppose que λ, μ, ν, λ', μ', ν' sont des nombres réels, et, comme l'équation (1) ne renferme que leurs carrés, on peut évidemment les regarder comme positifs.

On peut aussi permuter d'une manière quelconque les exposants λ, μ, ν, ainsi que λ', μ', ν', ce qui revient à effectuer sur x une des substitutions

$$x=x,\quad 1-x,\quad \frac{1}{x},\quad \frac{1}{1-x},\quad \frac{x}{x-1},\quad \frac{x-1}{x},$$

et sur y une des substitutions

$$y=y,\quad 1-y,\quad \frac{1}{y},\quad \frac{1}{1-y},\quad \frac{y}{y-1},\quad \frac{y-1}{y}.$$

De toute intégrale algébrique de l'équation (1) on déduira ainsi, au moyen des substitutions précédentes, trente-six intégrales qui pourront ne pas être toutes distinctes; c'est ce qui arrivera si la relation

$$f(x,y)=0$$

se reproduit par quelques-unes des substitutions précédentes.

Soit s le rapport de deux intégrales particulières de l'équation (2): on sait que ce quotient satisfait à l'équation différentielle

$$(5) \qquad [s]_x = R(\lambda, \mu, \nu, x).$$

Supposons que, dans cette équation (5), on substitue à la variable x la variable y, liée à x par l'équation (1); on aboutit à la nouvelle équation

$$(6) \qquad [s]_y = R(\lambda', \mu', \nu', y),$$

qui est vérifiée par le quotient de deux intégrales particulières de l'équation (3). Ce résultat s'explique aisément, si l'on a égard à la signification des intégrales de ces trois équations. Ainsi, par l'introduction de la variable auxiliaire s, l'équation (1) peut être remplacée par l'ensemble des équations (5) et (6), et le problème proposé est équivalent à celui-ci :

Trouver dans quels cas il existe une relation algébrique

$$f(x, y) = 0$$

permettant de passer de l'équation (5) *à l'équation* (6).

2. Avant d'aborder ce problème, il est nécessaire de rappeler les propriétés caractéristiques des intégrales de ces deux équations; comme elles sont de même nature, il suffit de considérer l'une d'elles, par exemple l'équation (5). Soient y_1 et y_2 deux intégrales particulières distinctes de l'équation (2), et $s = \frac{y_1}{y_2} = S(\lambda, \mu, \nu, x)$. Les propriétés de la fonction $s = S(\lambda, \mu, \nu, x)$ ont été étudiées en détail par M. Schwarz dans son beau Mémoire *Ueber diejenigen Fälle*, etc. (*Journal de Crelle*, t. 75, p. 292-335). Quand on fait décrire à la variable x tous les contours fermés possibles, la fonction $s = S(\lambda, \mu, \nu, x)$ admet, pour une valeur donnée de x, une infinité de valeurs, sauf dans les cas bien connus (que nous écarterons) où l'intégrale générale est algébrique. Toutes ces valeurs se déduisent de l'une d'elles par des sub-

stitutions linéaires de la forme

$$s_i = f_i(s) = \frac{\alpha_i s + \beta_i}{\gamma_i s + \delta_i},$$

où α_i, β_i, γ_i, δ_i sont des constantes, et les diverses substitutions $f_i(s)$ forment un groupe G dérivé de deux substitutions fondamentales, qui correspondent à deux lacets décrits autour des points $x = 0$, $x = 1$. (Pour le calcul des coefficients α_i, β_i, γ_i, δ_i, voir *Annales de l'École Normale supérieure*, t. X, 2[e] série; *Supplément*, p. 28 et suivantes.) Dans le voisinage de toute valeur a de x, différente de 0, 1, ∞, toute branche de la fonction s est de la forme

$$s - b = k_1(x-a) + k_2(x-a)^2 + \ldots,$$

le coefficient k_1 étant toujours différent de zéro, et ce résultat est général, pourvu que l'on convienne de remplacer $s - \infty$ par $\frac{1}{s}$. Dans le voisinage des points $x = 0$, 1, ∞, les différentes branches de la fonction s ont respectivement les formes suivantes :

$$s = \frac{A_1 s_0 + A_2}{A_3 s_0 + A_4}, \qquad s = \frac{B_1 s_1 + B_2}{B_3 s_1 + B_4}, \qquad s = \frac{C_1 s_\infty + C_2}{C_3 s_\infty + C_4},$$

où les A, B, C sont des constantes, et s_0, s_1, s_∞ forment ce que nous appellerons les *intégrales normales* relatives aux trois points 0, 1, ∞. Si aucun de ces trois points n'est un point critique logarithmique, on prendra ces trois intégrales de façon qu'en les multipliant respectivement par x^λ, $(x-1)^\mu$, $\left(\frac{1}{x}\right)^\nu$, elles soient holomorphes dans le domaine du point correspondant et différentes de zéro en ce point. Dans le cas de points critiques logarithmiques, on les choisira de telle façon que

$$s_0 - \mathcal{A} \log x, \qquad s_1 - \mathcal{B} \log(x-1), \qquad s_\infty - \mathcal{C} \log\left(\frac{1}{x}\right),$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont des constantes convenables, soient holomorphes dans le domaine du point correspondant, après qu'on les a multipliées respectivement par x^λ, $(x-1)^\mu$, $\left(\frac{1}{x}\right)^\nu$, et différentes de zéro en ce point.

Si $s = S(\lambda, \mu, \nu, x)$ est une intégrale particulière de l'équation (5), l'intégrale générale est de la forme

$$\frac{as+b}{cs+d},$$

a, b, c, d désignant des constantes arbitraires. Soient G_0 le groupe de substitutions linéaires relatif à l'intégrale particulière s_0, et T_0 la substitution linéaire qui permet de passer de l'intégrale particulière s_0 à une intégrale quelconque s. Les opérations V du groupe G relatif à s se déduisent des opérations V_0 du groupe G_0 par la relation

$$V = T_0 V_0 T_0^{-1},$$

de sorte qu'il y a entre ces deux groupes *isomorphisme holoédrique*. Il en est de même des deux groupes relatifs à deux intégrales particulières quelconques.

Faisons décrire à la variable x toute la partie du plan située au-dessus de l'axe réel ; le quotient s, si l'on figure la quantité imaginaire s par un point d'un nouveau plan, décrira un triangle limité par trois arcs de cercle qui correspondent respectivement aux bords supérieurs de l'axe réel, $-\infty$——0, 0——$+1$, $+1$——$+\infty$. Les sommets A, B, C de ce triangle correspondent aux points 0, 1, ∞, et les angles ont pour valeurs $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$. Imaginons une demi-circonférence de rayon très petit ε ayant son centre au point $x = 0$, et située tout entière au-dessus de l'axe réel. Quand on marche sur cette circonférence du point $x = +\varepsilon$ au point $x = -\varepsilon$, le rayon joignant le point A au point qui figure la valeur de s aura tourné d'un angle égal à $\lambda\pi$ autour du point A. Le triangle ABC n'a aucun point de ramification dans son intérieur ; mais il peut se recouvrir lui-même plusieurs fois (c'est ce qui arrivera, si quelqu'un des nombres λ, μ, ν est supérieur à 2). Il peut aussi arriver que ce triangle s'étende plusieurs fois jusqu'à l'infini : ce qu'on pourra éviter en prenant une sphère au lieu d'un plan pour représenter la valeur de s. Mais, pour quiconque est familiarisé avec l'emploi des surfaces de Riemann sur le plan ou sur la sphère, il n'y a là aucune difficulté. La fonction analytique $s = S(\lambda, \mu, \nu, x)$ fournit ainsi l'*Abbildung* du demi-plan supérieur des x sur le triangle ABC limité par des arcs de cercle.

Cet *Abbildung* donne encore lieu aux remarques suivantes, dont nous aurons à faire usage :

I. Si l'un des exposants λ, μ, ν est un nombre entier, par exemple λ, les deux arcs de cercle issus du point A qui limitent le triangle sont tangents l'un à l'autre. Si le point $x = 0$ est un point critique logarithmique, ces deux arcs de cercle appartiennent à deux circonférences distinctes. Mais, si le terme logarithmique disparaît dans le développement de s_0, ces deux arcs de cercle se confondent, ou l'un d'eux est le prolongement de l'autre.

II. Il faut six constantes réelles indépendantes pour fixer la position du triangle ABC; ces six constantes correspondent exactement aux six constantes réelles qui figurent dans l'intégrale générale de l'équation (5). Le choix de ce triangle dans le plan des s équivaut par conséquent au choix d'une intégrale particulière.

Soit ABC le triangle, dont il vient d'être question, qui correspond au demi-plan supérieur des x. Faisons franchir à la variable x l'axe réel, entre les deux points 0 et 1 par exemple, et imaginons que cette variable décrive ensuite le demi-plan négatif. La variable s décrira un nouveau triangle ABC′ symétrique du premier par rapport à la circonférence dont fait partie l'arc AB. Je dirai que deux figures sont *symétriques par rapport à un cercle* C lorsqu'elles se déduisent l'une de l'autre au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques qui a pour pôle le centre du cercle C et k^2 pour module, k désignant le rayon du cercle, et j'appellerai cette transformation *réflexion sur le cercle* C. Cela posé, faisons décrire à la variable x un chemin quelconque ne passant par aucun des points 0, 1, ∞, et poursuivons la représentation sur le plan des s au moyen de la loi de symétrie précédente. Nous obtenons un réseau R de triangles d'arcs de cercle, d'angles $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, alternativement *congruents* au triangle primitif et à son symétrique, correspondant respectivement aux demi-plans des x.

Ce réseau recouvrira en général le plan, ou du moins une partie, un nombre illimité de fois.

Pour abréger, j'appellerai *triangle* (λ, μ, ν) un quelconque des triangles de ce réseau, et je les distinguerai en triangles *positifs* ou *négtifs,* suivant qu'ils correspondent à un demi-plan positif ou négatif.

Quand on décrit le contour d'un triangle de façon à avoir à sa gauche l'intérieur de ce triangle, on rencontre les sommets dans l'ordre o, 1, ∞ ou dans l'ordre inverse, suivant que l'on a affaire à un triangle positif ou négatif. Le triangle d'où l'on est parti pour former le réseau sera dit *fondamental;* le quadrilatère formé par le triangle fondamental et un quelconque des triangles symétriques par rapport à l'un de ses côtés sera de même appelé *quadrilatère fondamental.* Si l'on déforme ce quadrilatère de façon à joindre les bords congruents, on a une surface fermée qui correspond univoquement au plan des x.

Lorsque x décrit une petite circonférence autour du point $x = 0$, le point s subit deux réflexions successives sur les circonférences AB et AC. Il serait facile de déduire de là les coefficients des substitutions fondamentales du groupe G.

3. Soient $s = S(\lambda, \mu, \nu, x)$ une intégrale particulière de l'équation (5), et $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ la fonction que l'on en déduit par l'inversion, que j'appellerai, pour abréger, *fonction inverse.* Les propriétés de la fonction inverse résultent des propriétés de la fonction

$$S(\lambda, \mu, \nu, x)$$

elle-même. Si l'on fait décrire à la variable s un chemin ne passant par aucun des sommets du réseau R, la loi de symétrie déjà vue permet inversement de suivre sur le plan des x le chemin décrit par cette variable. Dans la pratique, si le réseau R recouvre plusieurs fois le plan des s, on devra concevoir le chemin décrit par cette variable comme tracé sur la surface de Riemann que le réseau R recouvre simplement. La fonction inverse est, en général, une fonction multiforme de s; si, pour une valeur s_0 de s, x prend une valeur x_0 différente de o, 1, ∞, s_0 ne coïncide avec aucun des sommets du réseau R, et dans le domaine de ce point, on aura

$$x - x_0 = H_1(s - s_0) + H_2(s - s_0)^2 + \ldots,$$

le coefficient H_1 étant toujours différent de zéro. Il est clair que la fonction inverse de l'intégrale générale de l'équation (5) sera

$$x = \varphi\left(\lambda, \mu, \nu, \frac{as + b}{cs + d}\right).$$

Prenons de même une intégrale particulière $s = S(\lambda', \mu', \nu', y)$ de l'équation (6); elle nous fournira, sur le plan des s, un réseau R' formé de triangles (λ', μ', ν') alternativement positifs et négatifs, qui correspondent aux deux demi-plans des y. Soit $y = \psi(\lambda', \mu', \nu', s)$ la fonction inverse de cette intégrale; cette fonction jouira de propriétés analogues à celles que nous avons reconnues à la fonction

$$x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s).$$

Il résulte évidemment des explications précédentes que le problème proposé peut s'énoncer ainsi :

Dans quels cas existe-t-il une relation algébrique entre les deux fonctions inverses $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ et $y = \psi(\lambda', \mu', \nu', s)$?

Remarquons que l'on peut supposer la fonction φ complètement déterminée; mais il faudra laisser indéterminées les trois constantes complexes dont dépend la fonction ψ.

4. Supposons, par conséquent, qu'il existe une relation algébrique irréductible $f(x, y) = 0$ entre ces deux fonctions inverses; désignons par p le genre de cette équation, par n' et n le degré en x et y respectivement. Soient X et Y les deux surfaces de Riemann relatives à cette équation, où l'on regarde x ou y comme la variable indépendante; la surface X se compose de n feuillets étendus sur le plan des x, et la surface Y de n' feuillets étendus sur le plan des y. Les points de chacune de ces surfaces se correspondent d'une façon univoque, et à chacun d'eux est attaché un point analytique x_0, y_0, tel que $f(x_0, y_0) = 0$. De l'existence de la relation $f(x, y) = 0$ entre deux fonctions inverses on déduit un certain nombre de conséquences qui se traduisent par des équations arithmétiques. Nous allons les établir rapidement, en suivant à peu près la méthode de M. Papperitz.

Soit (x_0, y_0) un système de solutions de l'équation $f(x, y) = 0$, x_0, y_0 étant tous les deux différents de $0, 1, \infty$, et appelons s_0 la valeur correspondante de s, que l'on peut toujours supposer finie. D'après ce qu'on a vu, les fonctions inverses $\varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ et $\psi(\lambda', \mu', \nu', s)$ sont

développables, dans le domaine du point s_0, en séries convergentes de la forme

$$x - x_0 = K_1(s - s_0) + K_2(s - s_0)^2 + \ldots,$$
$$y - y_0 = H_1(s - s_0) + H_2(s - s_0)^2 + \ldots,$$

les coefficients K_1 et H_1 n'étant pas nuls. Inversement on aura, dans le domaine des points x_0 et y_0,

$$s - s_0 = \frac{1}{K_1}(x - x_0) + l_1\,(x - x_0)^2 + \ldots,$$

$$s - s_0 = \frac{1}{H_1}(y - y_0) + m_1(y - y_0)^2 + \ldots.$$

Il suit de là que la valeur de y qui se réduit à y_0 pour $x = x_0$ est une fonction holomorphe de x dans le voisinage, et réciproquement. Par les points des deux surfaces X et Y correspondant au point analytique (x_0, y_0) ne passe qu'un seul feuillet.

Considérons, en second lieu, un système de solutions de l'équation $f(x, y) = 0$, où l'une des inconnues seulement a l'une des valeurs 0, 1, ∞; supposons, par exemple, que, pour $x = 0$, y prenne une valeur y_0 différente de 0, 1, ∞. On voit tout d'abord que le point singulier $x = 0$ ne pourra être un point critique logarithmique pour l'équation (2), et que λ ne pourra pas non plus être incommensurable; autrement, il serait impossible de déduire de l'équation (2), par le changement de variable $f(x, y) = 0$, une équation pour laquelle le point $y = y_0$ serait un point singulier que l'on peut faire disparaître en multipliant les intégrales par un même facteur. Soit donc $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$, α et β étant deux nombres entiers premiers entre eux. Dans le domaine du point $x = 0$, on a

$$s = \frac{as_0 + b}{cs_0 + d},$$

s_0 désignant l'intégrale normale relative à ce point; on aura donc, dans ce domaine,

$$\frac{1}{s_0} = \frac{cs - a}{b - ds} = x^{\frac{\alpha}{\beta}}(K_0 + K_1 x + \ldots), \qquad K_0 \gtrless 0.$$

et dans le domaine du point y_0,

$$\frac{cs-a}{b-ds} = \mathrm{H}_1(y-y_0) + \mathrm{H}_2(y-y_1)^2 + \ldots, \qquad \mathrm{H}_1 \neq 0.$$

Par suite, on peut écrire

$$x^{\frac{\alpha}{\rho}}(\mathrm{K}_0 + \mathrm{K}_1 x + \ldots) = (y-y_0)[\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2(y-y_0) + \ldots].$$

On déduit de cette égalité un développement de $y-y_0$ suivant les puissances positives de $x^{\frac{1}{\rho}}$ et commençant par un terme en $x^{\frac{\alpha}{\rho}}$, et inversement, on aura pour x un développement suivant les puissances croissantes de $(y-y_0)^{\frac{1}{\alpha}}$, commençant par un terme en $(y-y_0)^{\frac{\rho}{\alpha}}$. Sur la surface X, on aura donc, au point $x=0$, ρ feuillets réunis en cycle, et sur la surface Y, au point $y=y_0$, α feuillets réunis en cycle. Les sommets de ces deux cycles correspondent au point analytique

$$x = 0, \qquad y = y_0.$$

On étudie de la même façon les autres systèmes de solutions analogues, et l'on peut résumer le résultat comme il suit. Supposons, pour fixer les idées, que les nombres λ, μ, ν, λ', μ', ν' soient tous rationnels,

$$\lambda = \frac{\alpha}{\rho}, \qquad \mu = \frac{\beta}{\sigma}, \qquad \nu = \frac{\gamma}{\tau}, \qquad \lambda' = \frac{\alpha'}{\rho'}, \qquad \mu' = \frac{\beta'}{\sigma'}, \qquad \nu' = \frac{\gamma'}{\tau'}.$$

Les trois équations $f(0, y) = 0$, $f(1, y) = 0$, $f(\infty, y) = 0$ admettent respectivement r, s, t racines distinctes, différentes de 0, 1, ∞ : désignons-les par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$; $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_s$; $\eta''_1, \eta''_2, \ldots, \eta''_t$. De même, les trois équations $f(x, 0) = 0$, $f(x, 1) = 0$, $f(x, \infty) = 0$ admettent respectivement r', s', t' racines distinctes différentes de 0, 1, ∞, que nous désignerons par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r'}$; $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{s'}$; $\xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_{t'}$. Cela posé, on aura, sur la surface X, r cycles de ρ feuillets au point $x=0$, s cycles de σ feuillets au point $x=1$, t cycles de τ feuillets au point $x=\infty$, un cycle de α feuillets en chacun des points η_i, un cycle de β feuillets en chacun des points η'_i, et un cycle de γ feuillets en chacun

des points η''_i. On aura de même, sur la surface Y, r' cycles de ρ' feuillets au point $y = 0$, s' cycles de σ' feuillets au point $y = 1$, t' cycles de τ' feuillets au point $y = \infty$, un cycle de α' feuillets en chacun des points ξ_i, un cycle de β' feuillets en chacun des points ξ'_i, et un cycle de γ' feuillets en chacun des points ξ''_i.

Si le point $x = 0$ est un point critique logarithmique, ou si λ est incommensurable, le nombre correspondant r est nul, et de même pour les autres. Remarquons que les valeurs η ne sont pas forcément toutes distinctes; il pourrait arriver, par exemple, que l'équation $f(0, y) = 0$ admette 2ρ racines égales à η_i, qui se répartiraient alors en 2 cycles de ρ racines. La remarque se généralise aisément.

Pour abréger, j'appellerai *cycles de la première catégorie* les cycles dont il vient d'être question.

Il nous reste à nous occuper des systèmes de solutions de l'équation $f(x, y) = 0$, où les deux inconnues ont chacune l'une des valeurs 0, 1, ∞. Supposons, par exemple, que pour $x = 0$ on ait la solution $y = 0$. Sur la surface X on aura, au point $x = 0$, un certain nombre de feuillets δ_{00} tels que la valeur de y, sur chacun d'eux, au point $x = 0$, soit $y = 0$; sur Y on aura de même, au point $y = 0$, δ'_{00} feuillets tels que la valeur de x sur chacun d'eux, au point $y = 0$, soit $x = 0$. Ces feuillets se répartissent sur les deux surfaces en un même nombre ε_{00} de cycles qui se correspondent deux à deux. Considérons un de ces cycles sur X formé de h feuillets, et le cycle correspondant sur Y formé de h' feuillets. Soit A le point du plan des s qui figure la valeur de s correspondant aux sommets de ces deux cycles. Du point $x = 0$ comme centre avec un rayon très petit, décrivons sur le plan des x une circonférence, et considérons le domaine g formé par les portions des feuillets du cycle précédent, qui sont comprises à l'intérieur de cette circonférence. A ce domaine g correspond sur la surface Y un domaine analogue g'; le domaine correspondant du plan des s se compose, d'après le théorème de M. Schwarz, de $2h$ portions de triangles d'arcs de cercle ayant un sommet commun en A; la somme des angles de ces triangles, réunis autour du point A, est égale à $2h\lambda\pi$. On peut aussi considérer d'une autre façon ce domaine comme formé de $2h'$ portions de triangles d'arcs de cercle ayant un sommet commun en A, et la somme des angles de ces triangles réunis autour du point A devra

être égale à $2h'\lambda'\pi$. Il faudra donc que l'on ait

$$h\lambda = h'\lambda'.$$

Appliquons cette relation à tous les cycles analogues, et faisons la somme des égalités ainsi obtenues; il viendra

$$\delta_{00}\lambda = \delta'_{00}\lambda'.$$

Attribuons aux lettres δ_{01}, $\delta_{0\infty}$, δ_{10}, δ_{11}, $\delta_{1\infty}$, $\delta_{\infty 0}$, $\delta_{\infty 1}$, $\delta_{\infty\infty}$; δ'_{01}, $\delta'_{0\infty}$, δ'_{10}, δ'_{11}, $\delta'_{1\infty}$, $\delta'_{\infty 0}$, $\delta'_{\infty 1}$, $\delta'_{\infty\infty}$; ε_{00}, ε_{10}, ε_{01}, $\varepsilon_{0\infty}$, ε_{11}, $\varepsilon_{1\infty}$, $\varepsilon_{\infty 0}$, $\varepsilon_{\infty 1}$, $\varepsilon_{\infty\infty}$ des significations analogues à celles de δ_{00}, δ'_{00}, ε_{00}; nous aurons un système de neuf équations analogues à la précédente,

$$(7)\qquad\left\{\begin{array}{lll} \lambda\delta_{00} = \lambda'\delta'_{00}, & \mu\delta_{10} = \lambda'\delta'_{10}, & \nu\delta_{\infty 0} = \lambda'\delta'_{\infty 0}, \\ \lambda\delta_{01} = \mu'\delta'_{01}, & \mu\delta_{11} = \mu'\delta'_{11}, & \nu\delta_{\infty 1} = \mu'\delta'_{\infty 1}, \\ \lambda\delta_{0\infty} = \nu'\delta'_{0\infty}, & \mu\delta_{1\infty} = \nu'\delta'_{1\infty}, & \nu\delta_{\infty\infty} = \nu'\delta'_{\infty\infty}. \end{array}\right.$$

Posons

$$q = \varepsilon_{00} + \varepsilon_{01} + \ldots + \varepsilon_{\infty\infty},$$

$$\begin{array}{ll} \delta_{00} + \delta_{01} + \delta_{0\infty} = a, & \delta'_{00} + \delta'_{01} + \delta'_{0\infty} = a', \\ \delta_{10} + \delta_{11} + \delta_{1\infty} = b, & \delta'_{10} + \delta'_{11} + \delta'_{1\infty} = b', \\ \delta_{\infty 0} + \delta_{\infty 1} + \delta_{\infty\infty} = c, & \delta'_{\infty 0} + \delta'_{\infty 1} + \delta'_{\infty\infty} = c'; \end{array}$$

on déduit des équations (7)

$$(8)\qquad a\lambda + b\mu + c\nu = a'\lambda' + b'\mu' + c'\nu'.$$

Les relations (7) ont lieu, quels que soient λ, μ, ν, λ', μ', ν'. On en déduit immédiatement que, si l'un des nombres λ, μ, ν est nul, un au moins des nombres λ', μ', ν' sera nul aussi; inversement, si λ et λ' sont nuls, cette circonstance ne nous apprend rien sur la ramification de la surface X et de la surface Y au point $x = 0$, $y = 0$. Par exemple, considérons les équations modulaires auxquelles donne naissance la transformation des intégrales elliptiques de première espèce, prises sous la forme de Legendre,

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - \lambda^2 t^2)}};$$

on a, dans l'équation de Kummer, à laquelle on est conduit,

$$\lambda = \mu = \nu = \lambda' = \mu' = \nu' = 0.$$

L'analyse précédente ne nous apprend qu'une chose relativement à ces équations : c'est que, quand on donne à l'une des variables une des valeurs 0, 1, ∞, toutes les valeurs que l'on obtient pour l'autre variable ne peuvent être que 0, 1, ∞.

Reprenons l'égalité précédente $h\lambda = h'\lambda'$, et soient $\lambda = \frac{\alpha}{\rho}$, $\lambda' = \frac{\alpha'}{\rho'}$. Soit m le plus petit multiple commun de α et de α', et posons

$$m = \alpha d = \alpha' d'.$$

Imaginons que la variable x fasse ρd tours successivement autour du point $x = 0$; le point qui figure s fera $\alpha d = \alpha' d'$ tours autour du point A, et la variable y reviendra à sa valeur initiale après avoir fait $\rho' d'$ tours successifs autour du point $y = 0$. Par suite, le nombre h des feuillets du cycle doit être un diviseur de ρd et h' un diviseur de $\rho' d'$; on obtient ainsi des conditions supplémentaires qu'il faut ajouter aux conditions (7). Supposons, en particulier,

$$\alpha = \alpha' = 1;$$

il vient

$$m = d = d' = 1,$$

et l'on voit que h doit être un diviseur de ρ et h' un diviseur de ρ', de telle sorte que $h\lambda$ *sera une partie aliquote de l'unité*. Cette remarque nous sera utile plus loin; si, en particulier, ρ et ρ' sont premiers entre eux, on aura forcément

$$h = \rho, \qquad h' = \rho'.$$

J'appellerai les q cycles précédents *cycles de la seconde catégorie*.

Aux équations précédentes, on en ajoute immédiatement six autres en écrivant que X se compose de n feuillets, et Y de n' feuillets,

$$(9) \qquad \begin{cases} n = a + r\rho = b + s\sigma = c + t\tau, \\ n' = a' + r'\rho' = b' + s'\sigma' = c' + t'\tau'. \end{cases}$$

Enfin, écrivons que le genre de la relation $f(x, y) = 0$ est égal à p; la formule de Riemann devient, en tenant compte des relations (9),

$$(10)\quad \begin{cases} 2p + q - 2 = n - r - s - t + r'(\alpha' - 1) + s'(\beta' - 1) + t'(\gamma' - 1), \\ 2p + q - 2 = n' - r' - s' - t' + r(\alpha - 1) + s(\beta - 1) + t(\gamma - 1), \end{cases}$$

et il est clair qu'on aura aussi les inégalités

$$(11)\qquad a + b + c \geqq q, \qquad a' + b' + c' \geqq q,$$

$$(12)\qquad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma \leqq n', \qquad \alpha', \quad \beta', \quad \gamma' \leqq n.$$

Nous pouvons dire, par conséquent, qu'*à toute intégrale algébrique de l'équation de Kummer correspond un système de solutions en nombres entiers et positifs des équations* (7), (8), (9), (10) *et des inégalités* (11) *et* (12).

5. Nous examinerons tout à l'heure si la réciproque est vraie. Des équations précédentes on déduit sans peine les équations ci-dessous, qui peuvent être utiles dans certains cas,

$$(13)\qquad n(1 - \lambda - \mu - \nu) = n'(1 - \lambda' - \mu' - \nu'),$$

$$(14)\qquad 3n \geqq q, \qquad 3n' \geqq q,$$

$$(15)\quad \begin{cases} r(\rho - 3) + s(\sigma - 3) + t(\tau - 3) \leqq 6p + 2q - 6, \\ r'(\rho' - 3) + s'(\sigma' - 3) + t'(\tau' - 3) \leqq 6p + 2q - 6, \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} n - r - s - t \leqq 2p + q - 2, \\ n' - r' - s' - t' \leqq 2p + q - 2, \end{cases}$$

$$(17)\quad \begin{cases} a + r(\rho - 2) + b + s(\sigma - 2) \leqq 2(t + 2p + q - 2), \\ a' + r'(\rho' - 2) + b' + s'(\sigma' - 2) \leqq 2(t' + 2p + q - 2). \end{cases}$$

De ces équations, on déduit aisément (voir Papperitz, *loc. cit.*, p. 33) qu'il n'existe qu'un nombre limité de solutions quand on se donne n' et p, pourvu qu'on suppose la quantité $\varpi = 1 - \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\tau}$ positive (pour un point singulier logarithmique, on pose $\rho = \infty$). En faisant une hypothèse de plus, on est conduit à une conclusion intéressante.

Supposons que chacun des exposants λ, μ, ν soit nul ou égal à une partie aliquote de l'unité. M. Schwarz a démontré que la fonction

$$x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$$

sera une fonction uniforme de s. Écartons les cas où cette fonction est rationnelle, simplement périodique ou doublement périodique; alors $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ sera une fonction fuchsienne de s, et la quantité ϖ sera positive. Mais les trois produits $s(\alpha - 1)$, $s(\beta - 2)$, $t(\gamma - 1)$ seront nuls, et les équations (9), (10) et (14) donnent une limite pour p et q quand on se donne n'. En rapprochant ce résultat du précédent, nous voyons que :

Si la fonction inverse $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ est une fonction fuchsienne, l'équation de Kummer n'admet qu'un nombre limité d'intégrales algébriques, d'un degré donné par rapport à x.

Nous supposons implicitement qu'à un système de solutions des équations précédentes ne correspond jamais qu'un nombre fini d'intégrales algébriques; c'est ce qui résulte du paragraphe suivant. Il peut arriver que quelques-uns des nombres r, s, t, r', s', t' soient nuls, comme nous l'avons déjà remarqué; si r est nul, par exemple, λ n'intervient pas dans les équations (9), (10), (11) et (12). Si ce nombre λ n'est pas déterminé par les équations (7), le système précédent admettra une infinité de systèmes de solutions, si l'on considère λ comme une indéterminée. Mais les surfaces X et Y ne dépendent pas de λ, et l'on n'aura encore, dans tous les cas, qu'un nombre limité d'intégrales algébriques.

6. On est naturellement amené à se demander jusqu'à quel point les équations arithmétiques qui viennent d'être établies sont suffisantes pour la détermination du problème. En d'autres termes, à tout système de solutions de ces équations correspond-il *en général* une intégrale algébrique de l'équation de Kummer? C'est là un point que M. Papperitz n'a pas abordé dans son travail. J'ai indiqué brièvement, dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (novem-

bre 1886), comment on pouvait répondre à cette question, et comment on était conduit à une réponse *négative*.

Prenons un système de solutions des équations (7), (8), (9), (10), (11) et (12). La construction des surfaces X et Y est un problème de combinaisons que l'on pourra toujours résoudre par un nombre fini d'essais, et qui n'admet dans tous les cas qu'un nombre fini de solutions. Supposons que nous ayons trouvé deux surfaces connexes X et Y satisfaisant à toutes les conditions de cette solution particulière et aux conditions supplémentaires. Nous avons à rechercher s'il existe une relation algébrique irréductible $f(x, y) = 0$, telle que les surfaces de Riemann correspondantes sur les plans des x et des y soient respectivement X et Y. Pour fixer les idées, j'examinerai d'abord un cas simple, celui où λ, μ, ν, λ', μ', ν' sont nuls, ou des parties aliquotes de l'unité; X et Y ne seront ramifiées qu'aux points 0, 1, ∞, et seront complètement déterminées. Appelons encore u une fonction algébrique de x ramifiée comme y, et v une fonction algébrique de y ramifiée comme x, de telle sorte que l'on ait

$$(18)\qquad \begin{cases} u = \varphi(x, y), & v = \psi(y, x), \\ y = \varphi_1(x, u), & x = \psi_1(y, v), \end{cases}$$

φ, φ_1, ψ, ψ_1 désignant des fonctions rationnelles; u sera racine d'une équation algébrique entière de degré n en u,

$$(19)\qquad F(x, u) = 0,$$

dont la surface de Riemann sur le plan des x sera précisément X. De même, v sera racine d'une équation algébrique entière de degré n',

$$(20)\qquad F_1(y, v) = 0,$$

dont la surface de Riemann sur le plan des y sera précisément Y. Les deux équations (19) et (20) devront appartenir à la même classe que l'équation $f(x, y) = 0$ et, par suite, avoir les mêmes modules. Ces deux équations ne sont pas entièrement déterminées, mais il est clair que leurs modules ne dépendent respectivement que des surfaces X et Y. Si ces surfaces ne sont pas de genre 0, rien ne prouve *a priori*

que leurs modules seront égaux, et il est aisé de se convaincre, par des exemples, qu'il n'en est pas ainsi en général. Si ces modules sont égaux, on pourra passer de l'équation (19) à l'équation (20) par une transformation birationnelle; mais il faudra, de plus, que les sommets des q cycles de la seconde catégorie de la surface X aient respectivement pour transformés les sommets des q cycles de la seconde catégorie de la surface Y. Cela posé, il y a plusieurs cas à distinguer.

Premier cas : $p = 0$. — On sait qu'on peut toujours passer par une transformation birationnelle d'une relation algébrique de genre zéro à une autre relation algébrique de genre zéro, et que les coefficients de cette transformation dépendent de trois paramètres arbitraires. Pour que la transformation remplisse les conditions voulues, il faudra donc que $q - 3$ conditions complexes soient vérifiées.

Deuxième cas : $p = 1$. — La transformation ne sera possible que si les deux modules sont égaux, et elle dépendra alors d'un seul paramètre arbitraire. Il faudra donc que q conditions complexes soient remplies.

Troisième cas : $p > 1$. — La transformation ne sera possible que si les surfaces ont les mêmes modules; ce qui fournit $3p - 3$ conditions complexes, et elle ne pourra se faire que d'un nombre *fini* de manières. On aura donc q nouvelles conditions.

Finalement, on voit que le nombre des conditions complexes qui doivent être vérifiées est, dans tous les cas, $3p + q - 3$. Ce nombre est encore le même lorsque les surfaces X et Y présentent des points de ramification en dehors des points 0, 1, ∞. Supposons, par exemple, $\lambda = \frac{\alpha}{\rho} (\alpha > 1)$, et soit η_i une racine de l'équation $f(0, y) = 0$ différente de 0, 1, ∞. La surface X présentera un cycle de ρ feuillets au point $x = 0$, et la surface Y un cycle de α feuillets au point $y = \eta_i$. Les modules de Y dépendront d'une indéterminée η_i; mais, dans l'application des deux surfaces l'une sur l'autre, le point $x = 0$, sommet du cycle de ρ feuillets, doit venir s'appliquer sur le point $y = \eta_i$, sommet du cycle de α feuillets. Le nombre total des conditions qui doivent être remplies reste donc le même, et il est clair que le raisonnement est général.

Supposons ces conditions remplies; la relation $f(x, y) = 0$ existera, et aura pour surfaces de Riemann X et Y. Cette relation fournira-t-elle une intégrale de l'équation de Kummer? Supposons que, dans le premier membre de l'équation (1), on ait remplacé x par sa valeur en fonction de y. Il est clair que le résultat sera une fonction uniforme du point analytique (x, y), qui pourra se mettre sous la forme d'une fonction rationnelle de x et de y, $\Phi(x, y)$; mais il ne résulte nullement de ce qui précède que $\Phi(x, y)$ se réduira à la forme

$$\frac{A y^2 + B y + C}{y^2(1-y)^2},$$

sauf dans le cas où la surface Y se réduit au plan des y, c'est-à-dire dans le cas d'une intégrale rationnelle (voir *Recherches sur l'équation de Kummer*, p. 11 et suivantes). Nous suivrons une marche toute différente pour reconnaître si un système de surfaces X et Y fournit une intégrale.

Pour une intégrale rationnelle, on a

$$p = 0, \qquad q = 3.$$

On est conduit à se demander s'il y a d'autres intégrales satisfaisant à ces conditions. Dans cette hypothèse, les formules (9), (10) et (11) deviennent

$$n = a + r\rho = b + s\sigma = c + t\tau,$$
$$1 = n - r - s - t + r'(\alpha' - 1) + s'(\beta' - 1) + t'(\gamma' - 1),$$
$$a + b + c \gtrless 3.$$

On en déduit

$$a + r(\rho - 2) + b + s(\sigma - 2) = 2 + 2t - 2\delta',$$

où

$$\delta' = r'(\alpha' - 1) + s'(\beta' - 1) + t'(\gamma' - 1);$$

j'ai discuté ce système dans le Mémoire déjà cité (p. 31). Si δ' n'est pas nul, on ne trouve de solutions qu'en prenant pour ρ, σ, τ les valeurs

ci-dessous :

$$2,\quad 2,\quad m,$$
$$2,\quad 3,\quad 3,$$
$$2,\quad 3,\quad 4,$$
$$2,\quad 3,\quad 5.$$

L'équation hypergéométrique correspondante s'intègre au moyen des fonctions algébriques, et nous retombons sur un cas qui a été écarté. Il faudra donc que l'on ait $\delta' = 0$, et Y ne sera ramifiée qu'aux points 0, 1, ∞. Par raison de symétrie, il en sera de même de X; ce que l'on prouverait du reste de la même façon. La relation $f(x, y) = 0$ étant de genre 0, les variables x et y pourront s'exprimer rationnellement en fonction d'une variable

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

et l'on reconnaît sans peine, en tenant compte de la ramification, que $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ jouissent des propriétés caractéristiques des intégrales rationnelles de l'équation de Kummer. La transformation algébrique considérée est donc une combinaison de deux transformations rationnelles. On démontre de la même façon que ces cas sont les seuls où l'on puisse avoir $3p + q - 3 = 0$.

Remarque I. — Dans le cas des transformations rationnelles, il existe aussi des solutions du système arithmétique qui ne fournissent pas d'intégrales; telle est la solution

$$n = 8, \quad n' = 1, \quad p = 0, \quad q = 3, \quad a = 0, \quad b = 0, \quad c = 3.$$
$$\lambda = \tfrac{1}{2}, \quad \mu = \tfrac{1}{4}, \quad \nu = \tfrac{1}{5}, \quad \lambda' = \mu' = \nu' = \tfrac{1}{5}.$$

Mais ici cela tient précisément à ce qu'on ne peut construire de surface connexe X à huit feuillets ayant la ramification demandée, comme il est facile de s'en convaincre.

Remarque II. — Il résulte aussi des considérations précédentes qu'un système de solutions des équations arithmétiques ne peut fournir qu'un nombre fini d'intégrales algébriques.

II.

7. Je me placerai tout d'abord dans un cas simple particulièrement intéressant, car il conduit à la recherche des relations algébriques entre les fonctions fuchsiennes qui proviennent de l'équation hypergéométrique. On sait que, lorsque chacun des exposants λ, μ, ν est nul ou égal à une partie aliquote de l'unité, le réseau R de triangles (λ, μ, ν) ne recouvre qu'une seule fois le plan, ou une partie du plan, de sorte que la fonction inverse $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ est uniforme. Cela posé, on aura trois cas à distinguer suivant le signe de $1 - \lambda - \mu - \nu$.

Premier cas : $1 - \lambda - \mu - \nu < 0$. — La fonction inverse est une fonction rationnelle, et l'on a ainsi les quatre fonctions rationnelles

$$x = \varphi(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{n}, s),$$
$$x = \varphi(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, s),$$
$$x = \varphi(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, s),$$
$$x = \varphi(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{5}, s).$$

Deuxième cas : $1 = \lambda + \mu + \nu$. — Cette hypothèse fournit les quatre fonctions uniformes

$$x = \varphi(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, s),$$
$$x = \varphi(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, s),$$
$$x = \varphi(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{6}, s),$$
$$x = \varphi(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, s),$$

dont la première $x = \sin^2 s$ est simplement périodique, tandis que les trois autres sont doublement périodiques.

Troisième cas : $\lambda + \mu + \nu < 1$. — A cette hypothèse correspondent un nombre illimité de fonctions inverses uniformes. Le cercle orthogonal aux trois côtés du triangle fondamental (λ, μ, ν) est réel, et les répétitions de ce triangle par la loi de symétrie forment un réseau R recouvrant une seule fois une portion du plan limitée par ce cercle.

Le groupe G est un groupe fuchsien de genre o et le polygone générateur est le quadrilatère que nous avons appelé *fondamental*. La fonction inverse $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ est une fonction fuchsienne n'existant que dans une portion du plan limité par le cercle orthogonal et admettant ce cercle pour ligne singulière essentielle [*voir* Poincaré, *Théorie des groupes fuchsiens* (*Acta mathematica*, t. I)].

Supposons de même que chacun des exposants λ', μ', ν' soit nul ou égal à une partie aliquote de l'unité, et que $\lambda' + \mu' + \nu'$ soit < 1 ; la fonction inverse $y = \psi\left(\lambda', \mu', \nu', \frac{as+b}{cs+d}\right)$ sera aussi une fonction fuchsienne de s. Nous nous proposons de rechercher dans quels cas il existe une relation algébrique $f(x, y) = 0$ entre les deux fonctions fuchsiennes $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ et $y = \psi\left(\lambda', \mu', \nu', \frac{as+b}{cs+d}\right)$, les constantes a, b, c, d étant choisies convenablement.

8. Les équations (9), (10) et (11) deviennent dans ce cas

$$(9)' \qquad \begin{cases} n = a + r\rho = b + s\sigma = c + t\tau, \\ n' = a' + r'\rho' = b' + s'\sigma' = c' + t'\tau', \end{cases}$$

$$(10)' \qquad 2p + q - 2 = n - r - s - t = n' - r' - s' - t',$$

$$(11)' \qquad a + b + c \geqq q, \qquad a' + b' + c' \geqq q.$$

Soit (Λ) un système de solutions de ces équations; a, b, c, a', b', c' étant connus, on en déduira pour les δ_{ik} un nombre fini de systèmes de valeurs. Prenons un système de valeurs satisfaisant aux équations (7) et partageons ensuite chaque δ et le δ' correspondant en un même nombre de parties, de façon qu'entre deux parties correspondantes h, h' on ait toujours la relation $h\lambda = h'\lambda'$, et que h soit un diviseur de ρ. Cela fait, adoptons un des systèmes en nombre fini que l'on aura trouvés ainsi.

Il nous faut maintenant former les surfaces de Riemann X et Y dont la ramification résulte du système de solutions adopté; X, par exemple, est composée de n feuillets étendus sur le plan des x, et n'est ramifiée qu'aux trois points $x = 0$, 1, ∞. Au point $x = 0$, si $\lambda = \frac{1}{\rho}$, le nombre des feuillets réunis en cycle est égal à ρ ou à un diviseur de ρ; si λ est

nul, la ramification en ce point peut être quelconque. Il en est de même pour les points $x = 1$, $x = \infty$. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, la formation de la surface connexe X, quand on se donne le nombre des cycles en chacun des points 0, 1, ∞ et le nombre des feuillets de chaque cycle, est un problème de combinaisons qui n'admet qu'un nombre fini de solutions. Supposons encore que nous ayons obtenu toutes ces solutions : ce que l'on pourra toujours faire par un nombre limité d'essais. Adoptons l'une d'elles, et proposons-nous de rechercher s'il existe une relation algébrique irréductible $f(x, y) = 0$ admettant cette surface X pour surface de Riemann et répondant à la question.

Représentons-nous pour cela les $2n$ demi-feuillets positifs et négatifs de la surface X; distinguons les n demi-feuillets positifs par un numéro variant de 1 à n, et les n demi-feuillets négatifs par un numéro variant de -1 à $-n$. Chacun des demi-feuillets positifs est relié au plus à trois demi-feuillets négatifs, quand on fait franchir à la variable l'axe réel, et inversement. Au moyen de coupures pratiquées dans cette surface le long de l'axe réel, on peut la transformer en une surface simplement connexe $\mathfrak{X}$, telle que deux chemins tracés sur cette surface et joignant deux points quelconques M et M' soient équivalents, c'est-à-dire puissent se réduire l'un à l'autre par une déformation continue sans franchir aucun des points $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$. Soit L la limite de cette surface $\mathfrak{X}$; L se composera des bords des coupures qui ont été pratiquées dans X. Cela posé, faisons l'*Abbildung* de la surface $\mathfrak{X}$ sur le plan des s au moyen de la relation

$$x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s).$$

D'après le théorème de M. Schwarz, cet *Abbildung* se composera de $2n$ triangles (λ, μ, ν) alternativement positifs et négatifs. Ces $2n$ triangles formeront un polygone P, ne se recouvrant pas lui-même, et dont les côtés seront des arcs de cercle correspondant aux bords des coupures de X. Les deux côtés de P qui correspondent aux deux bords d'une même coupure peuvent se déduire l'un de l'autre par une substitution linéaire; *donc les côtés du polygone* P *sont congruents deux à deux*. Imaginons que l'on déforme ce polygone P d'une manière continue de façon que les côtés congruents viennent se coller l'un contre

l'autre; on obtient une surface fermée $\mathfrak{X}$, de même genre que la surface X, et qui peut remplacer cette dernière dans toutes les considérations qui reposent uniquement sur la géométrie de situation. En particulier, de la manière dont sont disposés les côtés congruents de P, on peut déduire immédiatement la ramification de X. La formation de la surface X ou celle du polygone P sont, par conséquent, deux problèmes équivalents, dont le second peut même, à certains égards, être considéré comme plus simple que le premier. Quelle que soit la voie que l'on adopte, je supposerai désormais que l'on a obtenu la surface X et le polygone P correspondant; j'appellerai $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_N$ les substitutions linéaires qui changent l'un en l'autre les côtés congruents de P. Il peut arriver que deux côtés congruents viennent se confondre; dans ce cas, on supprimera ce côté. Quelles sont maintenant les conditions pour qu'il existe une relation algébrique $f(x, y) = 0$ entre les fonctions fuchsiennes $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$ et $y = \psi\left(\lambda', \mu', \nu', \frac{as+b}{cs+d}\right)$, admettant X pour surface de Riemann sur le plan des x?

La réponse est immédiate. *Il faut et il suffit qu'en choisissant convenablement les constantes a, b, c, d, les substitutions $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_N$ appartiennent au groupe fuchsien* G′ *relatif à la fonction*

$$y = \psi\left(\lambda', \mu', \nu', \frac{as+b}{cs+d}\right).$$

9. Si l'on connaissait la forme générale des substitutions du groupe G′, comme cela a lieu pour les fonctions modulaires, cet examen serait facile. Mais il n'en est pas ainsi en général, et il est nécessaire d'avoir recours à d'autres considérations. Le groupe G′ dépend de trois constantes complexes ou, ce qui revient au même, de six constantes réelles. De ces six constantes, il y en a trois qui se déterminent immédiatement. En effet, toutes les substitutions de ce groupe doivent conserver le cercle orthogonal aux côtés du polygone P; en d'autres termes, le réseau R′ de triangles (λ', μ', ν') doit avoir le même cercle principal que le réseau R de triangles (λ, μ, ν). Il y a une infinité de réseaux R′ jouissant de cette propriété; la position de ce réseau dépend encore de trois constantes réelles. Mais ce réseau R′ doit satisfaire à d'autres conditions; en effet, q sommets de ce réseau doivent coïncider

respectivement avec les sommets du polygone P qui sont les images des sommets des cycles de la seconde catégorie de la surface de Riemann X.

Supposons, par exemple, qu'un des sommets (λ') du réseau R′ doive coïncider avec un des sommets (λ) du polygone P, et soit $\lambda \neq 0$. On peut construire le polygone P de telle façon que le sommet (λ) en question soit le centre du cercle orthogonal. Admettons qu'on ait fait la figure de cette façon; nous pourrons ensuite construire un réseau R′ admettant même cercle principal et dont un sommet (λ') coïncidera avec le sommet (λ) précédent.

Tous les réseaux R′ jouissant de la même propriété se déduiront de celui-là par une rotation autour de ce sommet.

Si q est supérieur à 1, un certain nombre d'autres sommets du réseau R′ devront coïncider avec des sommets du polygone P; comme dans une rotation autour du sommet (λ) chaque sommet de R′ décrit une circonférence, on pourra toujours trouver toutes les positions de ce réseau qui satisfont aux conditions précédentes, et il n'y en aura jamais qu'un nombre *limité*. Supposons qu'on ait trouvé une de ces positions et construisons la portion de ce réseau qui entoure le polygone P. Soient AB, A′B′ deux côtés congruents du polygone P, tels que la substitution Σ_i change AB en A′B′. Prenons deux points correspondants M et M′ sur ces deux côtés. Pour que la substitution Σ_i appartienne au groupe G′, *il faut que les points* M *et* M′ *soient à l'intérieur de deux triangles congruents* (λ', μ', ν') *et que la substitution linéaire qui change ces deux triangles l'un en l'autre soit identique à la substitution* Σ_i. Une méthode semblable s'applique à tous les couples de côtés congruents du polygone P.

Il est clair que les opérations géométriques précédentes se traduisent analytiquement par des calculs toujours possibles. Dans la pratique, il peut être avantageux de choisir le cercle orthogonal d'une façon particulière, par exemple de supposer qu'il se réduit à l'axe réel. Mais je ne m'arrêterai pas à ces simplifications, que l'on aperçoit aisément dans chaque cas particulier. On en trouvera des exemples plus loin.

La méthode précédente suppose que le nombre q est au moins égal à 2. On peut encore employer une méthode un peu plus générale que la précédente et qui n'exige aucune hypothèse sur le nombre q. Ima-

ginons que le cercle C orthogonal aux côtés du polygone P soit le cercle de rayon un décrit de l'origine comme centre, et que ce polygone soit tout entier à l'intérieur de C. Appelons L de deux points intérieurs la L de l'arc de cercle orthogonal à C qui joint ces deux points. Pour la définition de la L et pour tout ce qui va suivre, je renverrai le lecteur aux Mémoires que M. Poincaré a publiés dans les premiers Volumes des *Acta mathematica*. Si l'on considère diverses circonférences coupant orthogonalement le cercle fondamental C et les arcs de ces circonférences qui sont interceptés par le polygone P, la L de ces arcs restera inférieure à une certaine limite que j'appelle L′ et dont il est facile d'avoir des valeurs approchées par excès.

Imaginons maintenant que l'on ait construit un réseau R′ de triangles (λ', μ', ν') admettant le cercle C pour cercle fondamental : considérons un point M à l'intérieur d'un de ces triangles et ses divers transformés par les substitutions du groupe G′. Parmi ces divers transformés, il n'y en aura qu'un nombre limité $m_1, m_2, \ldots, m_k$, tels que la L des deux points M et m_i soit inférieure à la limite L′. Soient $\Sigma'_1, \Sigma'_2, \ldots, \Sigma'_k$ les substitutions correspondantes du groupe G′, et soit T la substitution linéaire la plus générale qui conserve le cercle fondamental; cette substitution dépend, comme on sait, de trois paramètres arbitraires réels. Si nous appliquons au réseau R′ la substitution T, le groupe G′ est remplacé par un groupe G″ holoédriquement isomorphe au premier et les substitutions précédentes sont remplacées par les substitutions $\Sigma''_1, \Sigma''_2, \ldots, \Sigma''_k$. Mais il est à remarquer que ces substitutions sont les seules du groupe G″ qui jouissent de la propriété suivante : la L de l'arc de cercle orthogonal à C qui joint un point M à l'un de ses transformés par une de ces substitutions est inférieure à la limite L′. Si donc il existe des substitutions du groupe G″ qui changent l'un en l'autre les côtés congruents du polygone P, ces substitutions seront au nombre des substitutions $\Sigma''_1, \Sigma''_2, \ldots, \Sigma''_k$. Comme ces dernières sont en nombre fini et qu'elles ne dépendent que de trois paramètres arbitraires, il sera toujours possible, par un nombre fini d'essais, de reconnaître si l'on peut disposer de ces trois paramètres de façon que quelques-unes de ces substitutions changent l'un en l'autre les côtés congruents de P.

En rapprochant ces résultats de ceux qui ont été obtenus dans la première partie de ce travail, nous voyons qu'*on pourra toujours, par*

un nombre limité d'essais, trouver tous les cas où il existe une relation algébrique d'un degré donné entre deux fonctions fuchsiennes provenant de l'équation hypergéométrique.

10. On peut présenter les recherches précédentes sous une forme un peu différente, de façon à les rattacher plus étroitement à la théorie générale des fonctions fuchsiennes. Je vais démontrer pour cela que *le polygone* P *est le polygone générateur d'un groupe fuchsien.* Les côtés de ce polygone P sont tous de la première sorte; les sommets sont de la première ou de la seconde catégorie. Le polygone P sera de la première famille si les trois exposants λ, μ, ν sont différents de zéro; dans le cas contraire, il sera de la seconde ou de la sixième famille. Nous avons déjà vu que *les côtés de ce polygone sont congruents deux à deux.* Il ne nous reste plus qu'à examiner si *la somme des angles d'un même cycle de la première catégorie est une partie aliquote de* 2π. C'est ce qui résulte bien aisément de la façon dont ce polygone a été obtenu. En effet, les sommets de P correspondent sur la surface X aux trois points 0, 1, ∞ et les sommets qui font partie d'un même cycle correspondent sur X au sommet d'un même cycle de feuillets. Supposons, par exemple, $\lambda \neq 0$, et soit $\lambda = \frac{1}{\rho}$; prenons sur X un cycle de m feuillets réunis autour du point $x = 0$. Quand on fait l'*Abbildung* de la surface X sur le plan de s, chaque demi-feuillet de cette surface donne un triangle d'angles $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$; la somme des angles des sommets de P provenant de ce cycle sera donc égale à $2m\lambda\pi$ ou à $\frac{2m\pi}{\rho}$; comme m, nous l'avons vu plus haut, doit être égal à ρ ou à un diviseur de ρ, il en résulte que la somme des angles de ce cycle sera égale à 2π ou à une partie aliquote de 2π. C. Q. F. D.

Si $m = \rho$, le cycle correspondant sera de la première sous-catégorie, et il peut se faire que ce sommet disparaisse dans le polygone P en réunissant deux côtés contigus. Mais, si m est un diviseur de ρ, le cycle correspondant sera de la deuxième sous-catégorie. J'appellerai Γ le groupe fuchsien auquel le polygone P donne naissance; ce groupe Γ est un sous-groupe de G, d'indice fini, et distingué.

Si, au lieu de partir de la surface X, on était parti de la surface Y, on aurait obtenu de même un polygone P' composé de $2n'$ triangles

(λ', μ', ν') donnant naissance à un groupe fuchsien identique au précédent Γ contenu dans le groupe G′. On peut déduire ces polygones l'un de l'autre au moyen d'une transformation employée déjà par M. Poincaré et que je vais rappeler en quelques mots. Soient S un polygone générateur d'un groupe fuchsien g, AB, A′B′ deux côtés congruents de ce polygone et Σ_i la substitution linéaire qui change AB en A′B′. Soient ϖ une portion du polygone S adjacente au côté AB et ϖ' la portion du plan transformée de ϖ par la substitution Σ_i. Si du polygone S on retranche la portion ϖ et qu'on y ajoute la portion ϖ', on obtient un nouveau polygone S′ que nous dirons *équivalent* au premier. Plus généralement tout polygone qui se déduit de S par une série d'opérations de ce genre sera dit équivalent au polygone S. On voit aisément qu'il y a réciprocité entre deux polygones équivalents, et qu'ils définissent l'un et l'autre le même groupe fuchsien. Remarquons que deux polygones équivalents n'ont pas forcément le même nombre de côtés ; on peut en effet augmenter à volonté le nombre des côtés. Nous en verrons des exemples un peu plus loin.

Cela posé, revenons à notre polygone P et à la surface découpée $\mathfrak{X}$ qui lui correspond point par point. A cette dernière on peut faire correspondre, point par point, une surface analogue $\mathfrak{Y}$, que l'on déduit de Y par certaines coupures L′ pratiquées suivant les lignes de cette surface qui correspondent à la ligne L. Il y aura donc aussi une correspondance univoque entre le polygone P et la surface $\mathfrak{Y}$. Mais, quand on fait l'*Abbildung* de Y sur le plan des s au moyen de la relation

$$y = \psi\left(\lambda', \mu', \nu', \frac{as+b}{cs+d}\right),$$

on sait qu'à chaque demi-plan de cette surface correspond sur le plan des s un triangle (λ', μ', ν'). Il faut toutefois remarquer que les diverses portions du plan des s, qui sont les images d'un même demi-plan de la surface Y, ne sont pas forcément adjacentes; c'est ce qui arrivera si la ligne L′ de Y, qui correspond à la ligne L de X et par suite au périmètre de P, traverse un ou plusieurs de ces demi-plans. Pour prendre le cas le plus général, supposons qu'un certain demi-plan de Y ait pour images, sur le plan des s, q portions séparées dont chacune sera par con-

séquent adjacente au périmètre de P. Soient l_1, l_2, ..., l_q ces différentes portions; construisons le triangle (λ', μ', ν') appartenant au réseau R' dont l_1 fait partie et soient l'_2, l'_3, ..., l'_q les portions de ce triangle qui sont respectivement congruentes à l_2, l_3, ..., l_q. Prenons une portion adjacente à l_1, l'_i par exemple. La portion l_i se change en l'_i par une des substitutions qui changent l'un en l'autre les bords congruents de P; si donc on retranche l_i du polygone P et qu'on lui ajoute l'_i, on obtiendra un polygone équivalent au premier. En continuant ainsi et en opérant de même pour chacun des triangles du réseau R' qui sont traversés par le périmètre de P, on arrivera à un polygone P', équivalent au premier, dont tous les côtés seront formés par des arcs de cercle appartenant au réseau R'. Ce polygone sera donc formé de $2n'$ triangles (λ', μ', ν') alternativement positifs et négatifs. Par conséquent, la recherche des cas où il existe une relation algébrique entre les deux fonctions fuchsiennes $x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s)$, $y = \psi(\lambda', \mu', \nu', s)$ est équivalente à la question de Géométrie suivante :

Trouver deux polygones équivalents P *et* P' *formés respectivement de* $2n$ *triangles* (λ, μ, ν) *et de* $2n'$ *triangles* (λ', μ', ν'), *alternativement positifs et négatifs.*

Les équations (9') et (10') ont une signification géométrique évidente. Considérons la surface fermée $\mathfrak{C}$ obtenue en déformant le polygone P de façon à réunir les bords congruents; on peut évidemment, au point de vue de la géométrie de situation, assimiler cette surface fermée à un polyèdre limité par $2n$ faces triangulaires, qui correspondent aux $2n$ demi-feuillets de X. Les sommets de ce polyèdre correspondent aux points 0, 1, ∞ de X et leur nombre sera par conséquent $r + s + t + q$; les arêtes correspondent aux portions de l'axe réel, $-\infty$——0, 0——$+1$, $+1$——$+\infty$, et il y en aura $3n$. Comme chaque arête aboutit à deux sommets, il y aura $2n$ arêtes partant des sommets (λ), $2n$ partant des sommets (μ) et $2n$ partant des sommets (ν); ce qui fournit les relations

$$n = a + r\rho = b + s\sigma = c + t\tau.$$

La formule d'Euler généralisée sur les polyèdres donne ensuite

$$2n + r + s + t + q = 3n + 2 - 2p,$$

c'est-à-dire

$$2p + q - 2 = n - r - s - t.$$

Les formules analogues s'interprètent de même en considérant la surface fermée $\mathfrak{P}'$ obtenue en déformant le polygone P′ de façon à réunir les bords congruents. Si les polygones P et P′ sont équivalents, les surfaces fermées $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ seront identiques; les équations (7) expriment que la somme des angles des triangles assemblés autour d'un point est la même dans les deux surfaces.

Quant à l'équation (13)

$$n(1 - \lambda - \mu - \nu) = n'(1 - \lambda' - \mu' - \nu'),$$

elle exprime aussi une propriété géométrique. On sait, en effet, que $1 - \lambda - \mu - \nu$ est proportionnel à la S du triangle (λ, μ, ν). Comme deux figures congruentes ont même S, $n(1 - \lambda - \mu - \nu)$ sera proportionnel à la S du polygone P, et $n'(1 - \lambda' - \mu' - \nu')$ sera de même proportionnel à la S du polygone P′. On obtiendrait donc la relation (13) en écrivant que ces deux polygones équivalents ont la même S.

Pour peu que l'on réfléchisse à la nature des relations précédentes, on conçoit aisément qu'elles expriment des conditions nécessaires, mais nullement suffisantes, pour que le problème de Géométrie posé plus haut admette une solution; ce qui est bien d'accord avec le résultat obtenu dans la première Partie de ce travail.

11. Cette théorie présente, comme on voit, beaucoup d'analogie avec la théorie de la transformation elliptique. Mais il y a aussi une différence essentielle; on sait, en effet, que toute transformation algébrique des fonctions elliptiques résulte de la combinaison de deux transformations rationnelles, tandis que nous connaissons déjà pour l'équation de Kummer une infinité d'intégrales algébriques, fournies par les équations modulaires, qui ne résultent pas de la combinaison d'intégrales rationnelles. Nous pouvons maintenant expliquer cette différence : soient (ω, ω') et (ω_1, ω'_1) deux systèmes de périodes; pour qu'il existe une relation algébrique entre deux fonctions doublement pério-

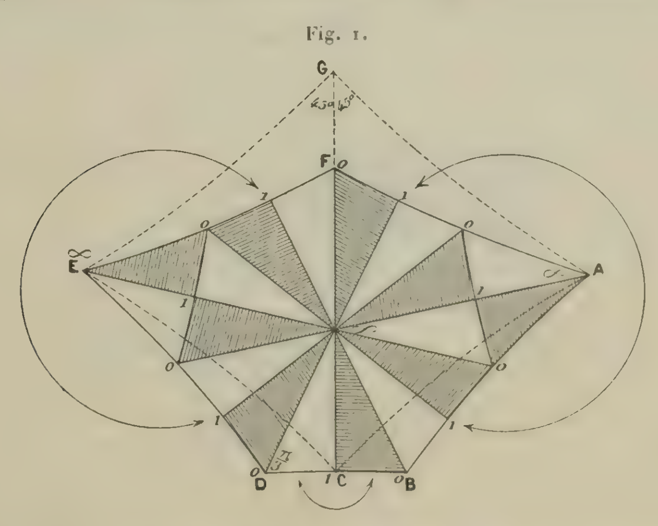
diques admettant ces périodes respectives, il faut et il suffit que les deux réseaux de parallélogrammes (ω, ω') et (ω_1, ω'_1) aient un réseau de sommets communs. S'il en est ainsi, on pourra trouver deux parallélogrammes équivalents composés respectivement de parallélogrammes élémentaires des deux réseaux. Ces deux parallélogrammes équivalents jouent absolument le même rôle que les polygones P et P'. Mais, tandis que l'on peut toujours ramener ces polygones à des parallélogrammes dans le cas de la transformation elliptique, nous ne pouvons pas, en général, ramener les polygones P et P' à des quadrilatères.

J'ai dit plus haut que le sous-groupe Γ était d'indice fini et distingué. Il est d'indice fini; cela résulte de la façon dont on a obtenu le polygone générateur. Il est distingué dans chacun des groupes G et G'; on le démontre en remarquant que toute substitution de Γ reproduit les fonctions fuchsiennes x et y.

12. Je vais appliquer la méthode qui vient d'être exposée à quelques exemples.

Exemple I. — L'hexagone ABCDEF (*fig.* 1) est formé de dix-huit

Fig. 1.



triangles $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7})$ alternativement positifs et négatifs. Les côtés AB et AF sont congruents, ainsi que BC et DC, ED et EF.

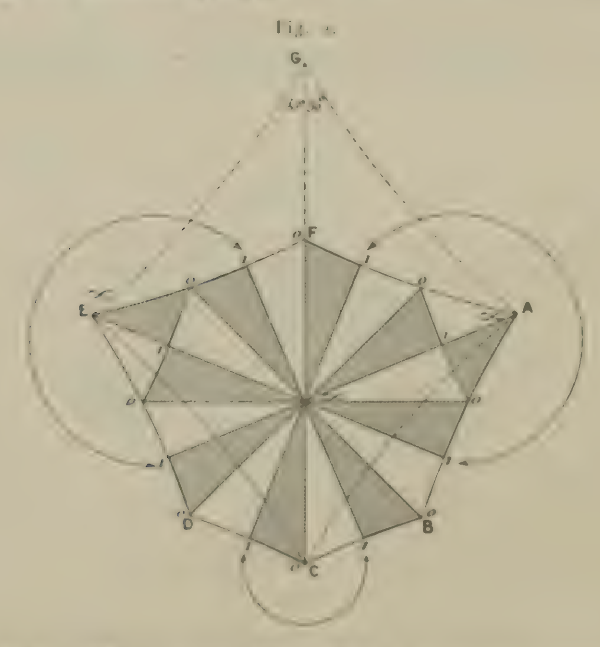
Joignons les sommets A et E au sommet C par deux arcs de circon-

férences orthogonales au cercle fondamental. Soient Σ_1 la substitution qui change AB en AF, et Σ_2 la substitution qui change ED en EF; Σ_1 change le triangle ABC en un triangle AFG, et de même Σ_2 change le triangle EDC en un triangle EFG. L'hexagone ABCDEF est donc équivalent au quadrilatère ACEG, où les côtés AC et AG sont congruents, ainsi que EC et EG. Les angles A et E de ce quadrilatère sont égaux à $\frac{2\pi}{7}$, tandis que les angles C et G sont égaux à $\frac{\pi}{4}$; on pourra regarder ce quadrilatère comme formé de deux triangles $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right)$ symétriques l'un de l'autre par rapport à un côté commun. Il existe donc une relation algébrique entre les deux fonctions fuchsiennes

$$x = \varphi\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{7}, s\right), \qquad y = \psi\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{7}, s\right),$$

du premier degré en x et du neuvième degré en y. J'ai obtenu cette relation dans un travail antérieur. [Voir *Recherches sur l'équation de Kummer*, p. 61, formule (55).]

Fig. 2.



Exemple II. — L'hexagone ABCDEF (*fig.* 2) est composé de vingt triangles $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ alternativement positifs et négatifs; les côtés conju-

gués sont AB et AF, CB et CD, ED et EF. Appelons Σ_1 et Σ_2 les deux substitutions qui changent respectivement AB en AF, ED en EF.

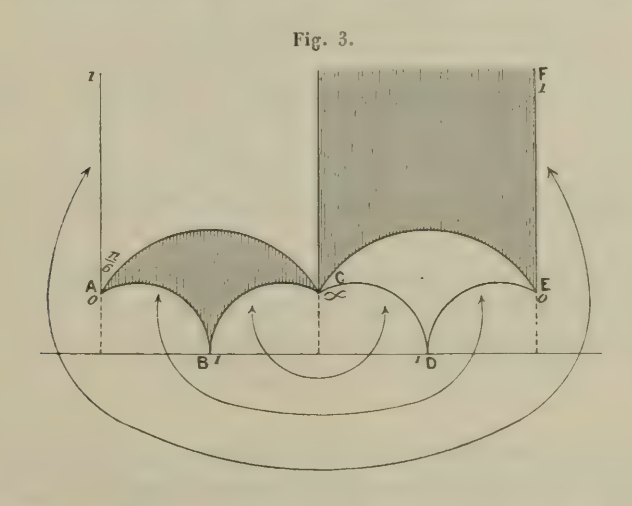
Joignons les sommets A et E au sommet C par des arcs de circonférences orthogonales au cercle fondamental. Si l'on applique aux deux triangles ABC, EDC les substitutions Σ_1 et Σ_2 respectivement, on obtient les deux triangles AFG, EFG, et l'hexagone ABCDEF est remplacé par le quadrilatère équivalent ACEG, où les côtés conjugués sont AC et AG, EC et EG. Les angles A et E de ce quadrilatère sont égaux à $\frac{2\pi}{8}$, et les angles C et G à $\frac{\pi}{3}$; il est donc formé de deux triangles $(\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ symétriques l'un de l'autre par rapport à un côté commun. Il en résulte qu'il existe une relation algébrique entre les deux fonctions fuchsiennes

$$x = \varphi(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{8}, s), \qquad y = \psi(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}, s),$$

du premier degré en x, du dixième degré en y. [Voir *Recherches sur l'équation de Kummer*, p. 62, formule (60).]

Exemple III. — Les *fig.* 3 et 4 représentent deux hexagones égaux ABCDEF, *abcdef*, obtenus de deux façons différentes (*fig.* 3 et 4).

Fig. 3.



L'hexagone ABCDEF est formé de quatre triangles $(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$, et le second *abcdef* de huit triangles $(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. On en conclut l'existence

d'une relation algébrique entre les deux fonctions fuchsie

$$x = \varphi(0, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}, s), \qquad y = \psi(0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, s),$$

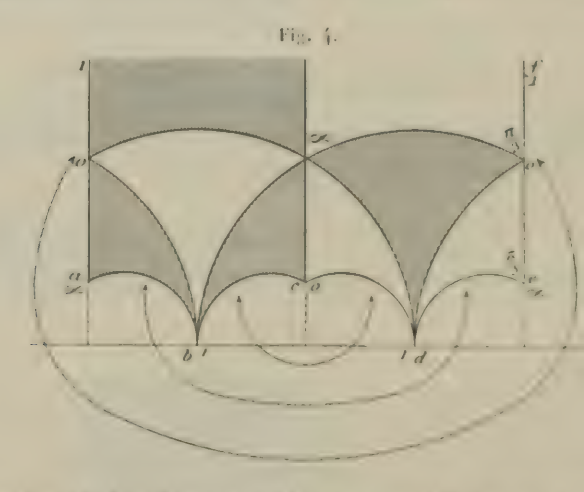
du second degré en y et du quatrième degré en x. Nous loin comment on peut obtenir cette relation qui est équiv semble des deux suivantes

$$y = \frac{t(t-2)^3}{(1-2t)^3}, \qquad x = t^2,$$

t désignant une variable auxiliaire.

Les intégrales algébriques que l'on connaît pour l'équa

Fig. 4.



mer donnent lieu à des figures analogues, que le lecteur co aisément.

Remarquons que, si les deux polygones P et P′ ont un c à une suite continue de valeurs réelles de x correspond u

les substitutions du groupe G, distinguons celles qui jo
propriété suivante : les points doubles sont distincts, e
mettre sous la forme

$$\frac{s'-a}{s'-a'} = e^{\frac{2i\pi}{\rho}} \frac{s-a}{s-a'},$$

ρ désignant un nombre entier. Soient Σ_0, Σ_1 deux subst
jouissant de cette propriété, et supposons qu'il en soit d
substitution composée $\Sigma_2 = \Sigma_0 \Sigma_1$: appelons $e^{\frac{2i\pi}{\rho}}$, $e^{\frac{2i\pi}{\sigma}}$, e
cateurs respectifs de ces trois substitutions et posons

$$\lambda = \frac{1}{\rho}, \qquad \mu = \frac{1}{\sigma}, \qquad \nu = \frac{1}{\tau}.$$

On démontre aisément que l'on peut disposer des tr
arbitraires de la fonction fuchsienne $x = \varphi\left(\lambda, \mu, \nu, \frac{as -}{cs -}\right.$
que le groupe de substitutions de x soit identique au gro
deux substitutions Σ_0, Σ_1 : les fonctions fuchsiennes x et
par conséquent, par une relation algébrique

$$F(x, u) = 0.$$

De même, soient Σ'_0, Σ'_1 deux autres substitutions du
$\Sigma'_2 = \Sigma'_0 \Sigma'_1$. Si ces trois substitutions jouissent des mêm
que les précédentes, on pourra trouver une nouvelle fonct
$y = \psi\left(\lambda', \mu', \nu', \frac{a's + b'}{c's + d'}\right)$, qui sera liée à u par une relati

$$F_1(y_1, u) = 0.$$

construites, comme plus haut, les deux surfaces de Riemann X et Y correspondant à cette solution; nous pouvons même, pour simplifier, nous borner à considérer X. Cette surface présentera en général, outre les points o, 1, ∞, un certain nombre d'autres points de ramification; soit η_i un quelconque de ces points. Imaginons que l'on transforme X en une surface simplement connexe $\mathfrak{X}$ au moyen de coupures pratiquées suivant l'axe réel et suivant les lignes indéfinies allant des points η_i au point $x = \infty$, de telle façon que tout chemin fermé tracé sur $\mathfrak{X}$ puisse se réduire à zéro par une déformation continue sans passer par aucun des points o, 1, ∞. Formons ensuite l'*Abbildung* de $\mathfrak{X}$ sur le plan des s au moyen de la relation

$$x = \varphi(\lambda, \mu, \nu, s);$$

nous obtenons ainsi un polygone P formé de $2n$ triangles (λ, μ, ν) alternativement positifs et négatifs. Ce polygone P peut se recouvrir plusieurs fois lui-même, et quelques-uns des triangles dont il se compose seront découpés suivant certaines lignes, images des coupures allant des points η_i à l'infini. Si l'on déforme ce polygone de façon à réunir les bords congruents, on obtient une surface fermée qui correspond d'une façon univoque à la surface X. Que faut-il maintenant pour qu'à cette surface de Riemann corresponde une intégrale algébrique? Il faut que tout chemin fermé tracé sur X ramène à sa valeur initiale la fonction inverse

$$y = \psi\left(\lambda', \mu', \nu', \frac{as+b}{cs+d}\right),$$

quand on choisit convenablement les constantes a, b, c, d. On détermine, comme plus haut, ces constantes en remarquant que q sommets du réseau R' doivent coïncider avec certains sommets de P. On peut aussi remarquer que les images des points η_i sur le plan des s doivent coïncider avec des sommets de ce polygone. Admettons que l'on ait trouvé un réseau R' satisfaisant à toutes ces conditions, et construisons la portion de ce réseau qui recouvre le polygone P. Il faudra, en outre, que ce réseau recouvre simplement le polygone P, et que les bords congruents de P soient aussi congruents dans le réseau R'; ce que l'on reconnaîtra absolument comme au n° 9.

III.

15. Nous allons maintenant nous occuper de la question suivante. Supposons qu'on ait reconnu, comme il vient d'être expliqué, l'existence d'une relation algébrique entre les deux fonctions fuchsiennes x et y. Comment obtiendra-t-on cette relation elle-même? La question n'est qu'un cas particulier du problème général qui consiste à déterminer les coefficients d'une relation algébrique $f(x, y) = 0$, connaissant les deux surfaces de Riemann X et Y correspondant à cette équation, c'est-à-dire le nombre des feuillets de chacune de ces surfaces, leurs points de ramification et la manière dont sont reliés les feuillets les uns aux autres autour des points de ramification.

Supposons d'abord que l'on connaisse une relation algébrique $F(u, v) = 0$ appartenant à la même *classe* que l'équation cherchée. On sait que x et y s'exprimeront par des fonctions rationnelles de u et de v,

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v);$$

lorsque la variable u décrit, dans son plan, la surface de Riemann qui correspond à la relation $F(u, v) = 0$, la variable x décrit également, dans son plan, une certaine surface de Riemann, dont le nombre des feuillets et les points de ramification ne dépendent que de la fonction rationnelle $\varphi(u, v)$. Nous sommes donc conduits à déterminer la fonction $\varphi(u, v)$, de façon que la surface de Riemann décrite par x dans son plan coïncide avec X, et la fonction $\psi(u, v)$ se déterminera par des conditions analogues. Le problème se trouve ainsi décomposé en deux problèmes tout à fait distincts; ce qui est un grand avantage dans certains cas, comme on le verra tout à l'heure. Géométriquement, on peut dire que, au lieu d'appliquer directement l'une sur l'autre les surfaces X, Y, nous cherchons à les appliquer séparément sur une surface de Riemann auxiliaire.

Si l'on ne connaît pas, ce qui est le cas général, d'équation de même classe que la relation inconnue, on pourra prendre pour $F(u, v)$ le polynôme qui, égalé à zéro, représente la courbe normale de genre p; mais il faudra laisser les modules indéterminés.

16. Cette méthode s'applique sans peine au cas où la relation cherchée est du genre zéro. On sait, en effet, que x et y pourront s'exprimer rationnellement en fonction d'une variable auxiliaire t, de façon qu'à un système de valeurs de x et de y ne corresponde qu'une valeur de t

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t);$$

cela revient à prendre pour surface auxiliaire le plan des t lui-même. La fonction $\varphi(t)$ ne dépend que de la surface X. Si cette surface se compose de n feuillets, $\varphi(t)$ sera de degré n; si, au point $x = a$, on a m feuillets réunis en cycle, l'équation $\varphi(t) = a$ devra admettre une racine multiple d'ordre m. Le nombre des paramètres arbitraires dont dépend $\varphi(t)$ dépasse le nombre des équations de condition de trois unités. [Voir *Sur les transformations rationnelles*, etc. (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II; 1885).] On achèvera de déterminer $\varphi(t)$ en choisissant les valeurs de t qui correspondent à trois valeurs données de x. On voit donc que ces coefficients se déterminent par des calculs algébriques.

Dans le cas qui nous occupe, X n'est ramifiée qu'aux points o, 1, ∞, et le calcul se simplifie. Désignons par i le nombre des cycles de feuillets autour du point $x = 0$, et soient $m_1, m_2, \ldots, m_i$ les nombres des feuillets de ces cycles; soit de même j le nombre des cycles qui ont leur sommet au point $x = 1$ et qui se composent respectivement de n_1, $n_2, \ldots, n_j$ feuillets. Enfin, soient k le nombre des cycles qui ont leur sommet au point $x = \infty$, et $p_1, p_2, \ldots, p_k$ les nombres des feuillets de ces cycles respectifs. On a les relations

$$n = m_1 + m_2 + \ldots + m_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_j = p_1 + p_2 + \ldots + p_k,$$

$$(21) \qquad i + j + k = n + 2,$$

dont la dernière n'est autre que la formule de Riemann donnant le genre d'une surface fermée. D'après ce que nous avons dit plus haut, on doit avoir

$$x = \mathrm{A}\frac{(t-a_1)^{m_1}\ldots(t-a_i)^{m_i}}{(t-c_1)^{p_1}\ldots(t-c_k)^{p_k}}, \qquad x - 1 = \mathrm{B}\frac{(t-b_1)^{n_1}\ldots(t-b_j)^{n_j}}{(t-c_1)^{p_1}\ldots(t-c_k)^{p_k}}$$

et, par suite,

$$(22)\quad \begin{cases} A(t-a_1)^{m_1}\ldots(t-a_i)^{m_i}-(t-c_1)^{p_1}\ldots(t-c_k)^{p_k} \\ \qquad = B(t-b_1)^{n_1}\ldots(t-b_j)^{n_j}. \end{cases}$$

Les paramètres indéterminés qui figurent dans l'identité précédente sont au nombre de $n+4$, tandis qu'on n'a que $n+1$ équations de conditions; ce qui est bien conforme au résultat général.

17. Si la relation inconnue est du genre un, les variables x, y pourront s'exprimer par des fonctions uniformes doublement périodiques d'un paramètre u,

$$x = \varphi_1(u), \qquad y = \psi_1(u),$$

de telle sorte qu'à un point analytique (x, y) ne corresponde qu'une valeur de u, abstraction faite des multiples de périodes. Ici encore la fonction doublement périodique $\varphi_1(u)$ ne dépend que de la surface de Riemann X. Elle sera d'ordre n si X se compose de n feuillets; si, au point $x=a$, on a un point de ramification d'ordre $m-1$, l'équation $\varphi_1(u)=a$ devra admettre une racine multiple d'ordre m. Bornons-nous, pour fixer les idées, au cas où X n'est ramifiée qu'aux trois points 0, 1, ∞; les lettres m, n, p ayant la même signification que tout à l'heure, l'équation (21) sera remplacée par la suivante

$$(23)\qquad i+j+k=n.$$

On devra avoir à la fois

$$x = A\frac{\sigma^{m_1}(u-u_1)\ldots\sigma^{m_i}(u-u_i)}{\sigma^{p_1}(u-w_1)\ldots\sigma^{p_k}(u-w_k)},$$

$$x-1 = B\frac{\sigma^{n_1}(u-v_1)\ldots\sigma^{n_j}(u-v_j)}{\sigma^{p_1}(u-w_1)\ldots\sigma^{p_k}(u-w_k)},$$

et, par suite, on aura l'identité suivante, analogue à l'identité (22),

$$(24)\quad \begin{cases} A\sigma^{m_1}(u-u_1)\ldots\sigma^{m_i}(u-u_i)-\sigma^{p_1}(u-w_1)\ldots\sigma^{p_k}(u-w_k) \\ \qquad = B\sigma^{n_1}(u-v_1)\ldots\sigma^{n_j}(u-v_j). \end{cases}$$

avec les relations

$$S = m_1 u_1 + \ldots + m_i u_i = n_1 v_1 + \ldots + n_j v_j = p_1 w_1 + \ldots + p_k w_k.$$

Par un changement de u en $u + \alpha$, on peut ramener à zéro la somme S; c'est ce que nous supposerons désormais. Divisons les deux membres de l'identité (24) par $\sigma^n(u)$; il vient

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} & A \frac{\sigma^{m_1}(u - u_1) \ldots \sigma^{m_i}(u - u_i)}{\sigma^n(u)} - \frac{\sigma^{p_1}(u - w_1) \ldots \sigma^{p_k}(u - w_k)}{\sigma^n(u)} \\ & \quad = B \frac{\sigma^{n_1}(u - v_1) \ldots \sigma^{n_j}(u - v_j)}{\sigma^n(u)}. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$F(u) = A \frac{\sigma^{m_1}(u - u_1) \ldots \sigma^{m_i}(u - u_i)}{\sigma^n(u)};$$

$F(u)$ est une fonction doublement périodique d'ordre n, n'admettant pas d'autre pôle que le point $u = 0$ et les points homologues. On peut donc l'exprimer linéairement en fonction de pu et de ses dérivées jusqu'à celle d'ordre $n - 2$, sous la forme

$$F(u) = c_0 + c_1 pu + c_2 p'u + \ldots + c_{n-1} p^{(n-2)}(u)$$

(*voir* Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 214). On déterminera les coefficients c_i ou plutôt les rapports de ces coefficients à l'un d'eux, en écrivant que l'équation $F(u) = 0$ admet la racine u_1 au degré de multiplicité m_1, etc. On a ainsi n équations qui déterminent les rapports $\frac{c_i}{c_0}$ en fonction rationnelle de $pu_1, pu_2, \ldots, pu_i$ et des dérivées $p'u_1, p'u_2, \ldots, p'u_i$.

Posons encore

$$F_1(u) = \frac{\sigma^{p_1}(u - w_1) \ldots \sigma^{p_k}(u - w_k)}{\sigma^n(u)},$$

$$F_2(u) = \frac{B\sigma^{n_1}(u - v_1) \ldots \sigma^{n_j}(u - v_j)}{\sigma^n(u)};$$

les fonctions doublement périodiques F_1 et F_2 s'expriment de la même

façon que $F(u)$, et l'identité (25) devient

$$F(u) - F_1(u) - F_2(u) = 0.$$

Pour que cette relation ait lieu identiquement, il faut et il suffit que, dans le domaine du point $u = 0$, les coefficients des puissances négatives de u, dans le développement du premier membre, soient nuls, ainsi que le terme constant. On a ainsi $n + 1$ équations de condition et l'on vérifie aisément, en tenant compte de l'équation (23), que l'on a le même nombre de paramètres arbitraires. On voit qu'on est encore ramené à des calculs algébriques.

Les fonctions doublement périodiques $F(u)$, $F_1(u)$, $F_2(u)$ étant déterminées de cette façon, la fonction doublement périodique

$$\varphi_1(u) = \frac{F(u)}{F_1(u)}$$

satisfait à toutes les conditions du problème. Il est facile de démontrer directement que l'équation $\varphi_1(u) = a$ n'a que des racines simples, tant que a ne prend aucune des valeurs $0, 1, \infty$. En effet, toute racine multiple de l'équation $\varphi_1(u) = a$ est racine de l'équation $\varphi'_1(u) = 0$. Or la dérivée $\varphi'_1(u)$ est d'ordre $n + k$, et nous connaissons déjà un certain nombre de racines. Le nombre total des racines connues est égal, en tenant compte du degré de multiplicité de chacune d'elles, à

$$m_1 - 1 + m_2 - 1 + \ldots + m_i - 1 + n_1 - 1 + \ldots + n_j - 1,$$

c'est-à-dire à $2n - i - j$ et, d'après la relation (23), à $n + k$. L'équation $\varphi'_1(u) = 0$ n'admet donc pas d'autre racine.

Nous venons de voir que, dans le cas de $p = 0$ et de $p = 1$, on était ramené à des calculs algébriques. Il est facile de trouver *a priori* le degré de l'équation finale, débarrassée des facteurs étrangers. En effet, d'après la manière même dont on obtient cette équation, on doit trouver la même équation pour toutes les surfaces de Riemann composées du même nombre de feuillets, ayant les mêmes points de ramification et le même nombre de feuillets dans les différents cycles. La recherche du nombre des surfaces satisfaisant à ces conditions est encore un problème de combinaisons, que l'on peut toujours résoudre par un nombre fini

d'essais. On voit en même temps que l'on sera conduit, en général, à une équation *irréductible* de degré supérieur au premier. La remarque précédente a déjà été faite par M. Klein (*Mathematische Annalen*, Bd. XIV, p. 424).

18. Comme application, proposons-nous de trouver les relations algébriques qui sont du second degré par rapport à x. Si l'on résout l'équation par rapport à x, on trouvera pour x une expression de la forme

$$x = \Phi(y, \sqrt{u}),$$

Φ désignant une fonction rationnelle, et u une des trois expressions y, $(1-y)$, $y(1-y)$, puisque la fonction algébrique x de la variable y ne peut être ramifiée qu'aux points 0, 1, ∞. Par une substitution linéaire, on peut toujours ramener u à la première forme ; par conséquent, si l'on pose $y = t^2$, la relation cherchée $f(x, y) = 0$ est équivalente au système des deux équations $y = t^2$, $x = \varphi(t)$, $\varphi(t)$ désignant une nouvelle fonction rationnelle qu'il s'agit maintenant de déterminer.

Dans l'équation (1), faisons $y = t^2$; elle prend la forme

$$(26) \qquad [x]_t + \frac{1-\lambda^2+(\lambda^2+\nu^2-\mu^2-1)x+(1-\nu^2)x^2}{2x^2(x-1)^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{\mathrm{A}t^4+\mathrm{B}t^2+\mathrm{C}}{2t^2(1-t^2)^2},$$

et nous sommes ramenés à la recherche des intégrales rationnelles de l'équation (26).

Soit $\varphi(t)$ une intégrale rationnelle de cette équation ; si dans l'équation (2) on fait le changement de variable $x = \varphi(t)$, puis qu'on multiplie les intégrales par un facteur convenable, la nouvelle équation n'aura que *quatre* points singuliers qui seront ici $t = 0, \infty, 1, -1$. Or la détermination des fonctions rationnelles jouissant de cette propriété est un problème déterminé [(voir *Annales de l'École Normale*, *loc. cit.*)], et il n'existe qu'un nombre limité de fonctions rationnelles satisfaisant à ces conditions, en dehors des cas où l'intégrale générale de l'équation (1) s'exprime au moyen de fonctions algébriques ou de fonctions doublement périodiques, cas que nous avons écartés. Chacune de ces fonctions rationnelles dépend de trois paramètres arbitraires, dont on devra pouvoir disposer de façon que les quatre points

critiques de la nouvelle équation soient o, $+1$, -1, ∞. Or c'est ce qui n'aura pas lieu en général; nous avons ainsi une nouvelle confirmation du résultat obtenu par d'autres considérations à la fin de la première partie. En effet, les équations arithmétiques dont dépend le problème de transformation dont il vient d'être question coïncident dans le cas actuel avec les équations de M. Papperitz, et nous voyons ici, sans aucun doute, que ces équations ne sont pas suffisantes.

Admettons que l'on ait trouvé une substitution $\varphi(t)$ telle qu'en posant $x=\varphi(t)$ dans l'équation (2), la nouvelle équation ait effectivement les quatre points singuliers o, $+1$, -1, ∞. Quand on remplacera x par $\varphi(t)$ dans le premier membre de l'équation (26), le résultat de la substitution sera de la forme

$$\frac{at^4+bt^3+ct^2+dt+e}{t^2(1-t^2)^2};$$

il faudra encore que l'on ait $b=0$, $d=0$. Imaginons que l'on ait décomposé la fonction précédente en fractions simples :

$$\frac{at^4+\ldots}{t^2(1-t^2)}=\frac{e}{t^2}+\frac{d}{t}+\frac{a-b+c-d+e}{4(1+t)^2}+\frac{a+b+c+d+e}{4(1-t)^2}+\ldots;$$

les coefficients de $\frac{1}{(t+1)^2}$ et $\frac{1}{(t-1)^2}$ devront être égaux, et celui de $\frac{1}{t}$ devra être nul. Or ces coefficients se calculent facilement. Supposons que $t=1$ soit racine multiple d'ordre m de l'équation $\varphi(t)=0$; on aura, dans le domaine du point $t=1$,

$$x=A_0(t-1)^m+A_1(t-1)^{m+1}+\ldots,$$

et, si l'on calcule le coefficient de $\frac{1}{(t-1)^2}$ dans le domaine du point $t=1$ dans le développement du premier membre de l'équation (26), on trouve aisément, pour la valeur de ce coefficient,

$$\tfrac{1}{2}(1-\lambda^2m^2).$$

Si $t=1$ était racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t)=1$, ou de l'équation

$\varphi(t) = \infty$, ce coefficient serait

$$\tfrac{1}{2}(1 - \mu^2 m^2) \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}(1 - \nu^2 m^2).$$

On calculera de même le coefficient de $\frac{1}{(t+1)^2}$.

Pour obtenir le coefficient de $\frac{1}{t}$, supposons que $t = 0$ soit racine d'ordre m de l'équation $\varphi(t) = 0$, de façon que l'on ait, dans le domaine du point $t = 0$,

$$x = A_0 t^m + A_1 t^{m+1} + \ldots;$$

si m est plus grand que 1, le coefficient cherché sera égal à

$$\frac{m A_1}{A_0}\left(\frac{1}{m^2} - \lambda^2\right).$$

Si $m = 1$, ce coefficient sera

$$(1 - \lambda^2)\frac{A_1}{A_0} + \frac{1 + \nu^2 - \mu^2 - \lambda^2}{2} A_0$$

(voir *Recherches sur l'équation de Kummer*, p. 13). Les conditions précédentes sont donc faciles à vérifier. Si elles sont remplies, le même procédé nous donnera A, B, C et par suite λ', μ', ν'.

Comme exemples de relations algébriques obtenues par cette voie, je citerai les deux suivantes :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t(t-2)^3}{(1-2t)^3}, \\ y = t^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \left(\dfrac{t+i}{t-i}\right)^4, \\ y = t^2, \end{cases}$$

dont la première correspond à la *fig.* 3 (*voir* p. 288). Pour la seconde équation, les valeurs de λ, μ, ν, λ', μ', ν' sont les suivantes :

$$\lambda = \frac{1}{4}, \qquad \mu = \alpha, \qquad \nu = \frac{1}{4}, \qquad \lambda' = \frac{\alpha}{2}, \qquad \mu' = \alpha, \qquad \nu' = \frac{\alpha}{2}.$$

Du reste, cette transformation est une combinaison des deux substi-

tutions rationnelles

$$u = \frac{-4x}{(x-1)^2}, \qquad u = \frac{(y^2-6y+1)^2}{-16y(1-y)^2}.$$

Remarque. — Nous connaissons déjà un certain nombre de fonctions fuchsiennes qui se ramènent, par des transformations algébriques, à la fonction modulaire. Telles sont, en employant toujours la même notation des fonctions inverses, les fonctions

$$\varphi(0, 0, 0, s), \quad \varphi(0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, s), \quad \varphi(0, 0, \tfrac{1}{2}, s),$$
$$\varphi(0, 0, \tfrac{1}{3}, s), \quad \varphi(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, 0, s), \quad \varphi(0, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}, s).$$

Si donc l'on prend pour λ, μ, ν un des systèmes de valeurs précédents, ainsi que pour λ', μ', ν', il résulte de la théorie des équations modulaires que l'équation de Kummer correspondante admettra une infinité d'intégrales algébriques.

IV.

19. Je vais, en terminant, démontrer un théorème général sur les équations linéaires, qui conduit à une conséquence intéressante relativement à l'équation de Kummer.

Soit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dy}{dx} + qy \tag{27}$$

une équation linéaire du second ordre à coefficients rationnels et à intégrales régulières. Considérons sur la sphère les $n+1$ points singuliers

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad a_{n+1} = \infty,$$

et joignons-les par n coupures

$$a_1a_2, \quad a_2a_3, \quad \ldots, \quad a_na_{n+1}.$$

Prenons deux intégrales quelconques distinctes de l'équation (27) et leur rapport z; lorsque x parcourt toute la sphère sans franchir les coupures, z décrira une certaine région R, analogue au polygone géné-

rateur d'un groupe fuchsien, mais qui pourra se recouvrir elle-même. Elle aura $2n$ côtés

$$\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_2\alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n\alpha_{n+1},$$
$$\alpha_1\beta_2, \quad \beta_2\beta_3, \quad \ldots, \quad \beta_n\alpha_{n+1},$$

correspondant aux n coupures

$$a_1a_2, \quad a_2a_3, \quad \ldots, \quad a_na_{n+1}.$$

Les côtés $\alpha_i\alpha_{i+1}$ et $\beta_i\beta_{i+1}$ répondent aux deux bords opposés de la coupure a_ia_{i+1}. Ces côtés sont conjugués et se déduisent l'un de l'autre par une substitution linéaire Σ_i.

Supposons qu'à une valeur de z ne corresponde qu'un nombre *fini* de valeurs de x,

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_{n-1},$$

ou, ce qui revient au même, que les polygones que l'on déduit de R par les substitutions Σ_i répétées un nombre quelconque de fois ne recouvrent que n fois le plan des z ou une portion de ce plan. Soit

$$P(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

une fonction symétrique de ces n valeurs; P sera une fonction uniforme de z reprenant la même valeur quand on fait subir à z une quelconque des substitutions Σ_i. En général, P sera donc une fonction kleinéenne de z, ou, dans certains cas particuliers, une fonction fuchsienne. Il est clair que toutes ces fonctions symétriques jouissent des propriétés suivantes : 1° elles sont uniformes quand z parcourt la région R; 2° elles reprennent la même valeur en deux points correspondants du périmètre de R; 3° elles n'ont d'autre singularité que des pôles ou des points singuliers logarithmiques. Elles s'expriment donc rationnellement en fonction de x (*voir* Schottky, *Journal de Crelle*, t. 83; Poincaré, *Acta mathematica*, t. IV, p. 221).

D'autre part, toutes ces fonctions kleinéennes s'exprimeront rationnellement au moyen de l'une d'elles, et il est clair que l'on aura

$$(28) \qquad v = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction rationnelle.

Cela posé, considérons les deux fonctions

$$Y_1 = \sqrt{\frac{dv}{dz}}, \qquad Y_2 = z\sqrt{\frac{dv}{dz}};$$

on aura

$$\frac{1}{Y_1}\frac{d^2 Y_1}{dv^2} = \frac{1}{Y_2}\frac{d^2 Y_2}{dv^2} = \frac{2\frac{d^3 v}{dz^3}\frac{dv}{dz} - 3\left(\frac{d^2 v}{dz^2}\right)^2}{4\left(\frac{dv}{dz}\right)^4}.$$

On vérifie aisément que le troisième membre de cette double inégalité est une fonction kleinéenne de z et, par suite, une fonction rationnelle de v, que j'appellerai $\psi(v)$. Il en résulte que l'équation linéaire du second ordre

$$(29) \qquad \frac{d^2 Y}{dv^2} = \psi(v) Y$$

admet les deux intégrales Y_1 et Y_2 dont le rapport est z. Soient y_1 et y_2 les deux intégrales de l'équation (27) dont le rapport est z; on aura

$$z = \frac{y_2}{y_1} = \frac{Y_2}{Y_1}.$$

La relation (28), jointe aux précédentes, nous montre qu'on passera de l'équation (29) à l'équation (27) en posant $v = \varphi(x)$, puis en multipliant les intégrales par une même fonction. Ainsi, lorsqu'en posant $\frac{y_1}{y_2} = z$ on obtient pour x une fonction analytique de z qui n'admet qu'un nombre fini de valeurs pour une même valeur de z, *l'équation (27) se déduit par une substitution rationnelle d'une équation de même forme où l'inversion du quotient des intégrales donne naissance à une fonction uniforme.*

20. Supposons que l'équation (27) soit une équation hypergéométrique et que l'inversion du quotient des intégrales donne naissance à une fonction non uniforme, mais n'admettant pour chaque valeur de la variable qu'un nombre fini de valeurs. Appliquons à cette équation le

théorème qui vient d'être démontré; l'équation (29) aura forcément trois points singuliers seulement, puisqu'on sait que le nombre des points singuliers d'une équation linéaire ne peut diminuer par une substitution rationnelle, et la transformation $v = \varphi(x)$ devra provenir d'une intégrale rationnelle de l'équation de Kummer. Il suit de là que, abstraction faite des cas où l'équation s'intègre algébriquement, on peut énumérer toutes les équations hypergéométriques pour lesquelles l'inversion du quotient des intégrales donne une fonction de la nature cherchée. Par suite, si λ, μ, ν sont des parties aliquotes de l'unité et s'il n'en est pas de même de λ', μ', ν'; si de plus λ', μ', ν' ne satisfont pas à la condition précédente, on pourra affirmer que l'équation (1) n'admet pas d'intégrale algébrique. On élimine ainsi un grand nombre de solutions des équations de M. Papperitz.

21. On peut déduire aussi du théorème démontré plus haut les résultats obtenus par M. Kœnigsberger (*Journal de Crelle*, t. 86) relativement à la réduction aux intégrales elliptiques de certaines intégrales abéliennes. Soit z une intégrale abélienne de première espèce de la forme

$$z = \int (x - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x - a_n)^{\alpha_n}\, dx,$$

où

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

désignent des nombres commensurables positifs ou négatifs. Supposons que cette intégrale n'admette que deux périodes distinctes; on sait alors que x, considéré comme fonction de z, n'admettra qu'un nombre fini de valeurs pour une valeur de z. Or considérons l'équation

$$(30) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{\alpha_1}{x - a_1} + \frac{\alpha_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x - a_n}\right)\frac{dy}{dx},$$

qui admet les deux intégrales

$$y_1 = 1, \qquad y_2 = \int (x - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x - a_n)^{\alpha_n}\, dx,$$

dont le rapport est z. D'après le théorème général, on aura une rela-

tion de la forme

$$v = \varphi(x),$$

v désignant une fonction uniforme de z qui, dans le cas particulier dont il est question, sera nécessairement doublement périodique. De plus, la fonction v devra provenir aussi de l'inversion des intégrales d'une équation linéaire à coefficients rationnels. Mais nous connaissons toutes les équations linéaires jouissant de cette propriété; elles se ramènent aux quatre types suivants :

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + \left(\frac{1}{v+1} + \frac{1}{v-1} + \frac{1}{k^2 v + 1} + \frac{1}{k^2 v - 1}\right)\frac{dY}{dv} = 0,$$

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v-1}\right)\frac{dY}{dv} = 0,$$

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + \left(\frac{2}{3}\,\frac{1}{v} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{v-1}\right)\frac{dY}{dv} = 0,$$

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + \left(\frac{3}{4}\,\frac{1}{v} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{v-1}\right)\frac{dY}{dv} = 0.$$

Égalons à z le rapport des intégrales de l'une de ces équations, par exemple de la première; on obtient la relation

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} = z = \int (x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}\,dx,$$

qui doit être identique à la relation $v = \varphi(x)$. En définitive, si l'intégrale considérée n'admet que deux périodes, elle se déduira par une substitution rationnelle de l'une des quatre intégrales

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}, \quad \int \frac{dv}{v^{\frac{2}{3}}(1-v)^{\frac{2}{3}}}, \quad \int \frac{dv}{v^{\frac{3}{4}}(1-v)^{\frac{1}{2}}}, \quad \int \frac{dv}{v^{\frac{5}{6}}(1-v)^{\frac{1}{2}}}.$$

Or les trois dernières intégrales se ramènent par des substitutions algébriques aux intégrales

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^3-1}}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^4-1}}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^6-1}};$$

d'où l'on tire le résultat obtenu par M. Kœnigsberger. Mais nous avons en même temps la forme de la transformation. De là on déduit aussi que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, réduits à leur plus simple expression, ne peuvent avoir pour dénominateur que l'un des nombres 2, 3, 4, 6. On peut encore tirer de là d'autres conséquences, pour lesquelles je renverrai le lecteur à mon Mémoire *Sur les transformations rationnelles des équations différentielles linéaires* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II, p. 37).

Sur la résolution de l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues;

PAR M. GASTON **DARBOUX**.

I.

Dans un court Article *Sur la résolution de l'équation*

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

et de quelques équations analogues, inséré en 1873 au tome XVIII (2e série, p. 236) de ce Journal, j'ai considéré successivement différentes équations différentielles, toutes comprises dans le type suivant :

$$f(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = 0, \tag{1}$$

où f désigne une fonction homogène quelconque à coefficients constants des différentielles $dx_1, \dots, dx_n$; et j'ai montré comment on peut intégrer ces équations, en supposant que $x_1, x_2, \dots, x_n$ soient des fonctions inconnues d'une même variable indépendante. Je me propose de revenir sur les résultats que j'ai indiqués, pour les compléter et en déduire quelques conséquences nouvelles.

Tout d'abord, il est nécessaire de bien préciser le problème proposé. On pourrait, évidemment, se donner arbitrairement, soit $x_3, x_4, \dots, x_n$ en fonction de x_2, soit $x_2, x_3, \dots, x_n$ en fonction d'un paramètre t.

L'équation (1) ferait alors connaître dx_1, en fonction de x_2 et dx_2 dans le premier cas, en fonction de t et de dt dans le second; et, par suite, x_1 serait déterminée par une quadrature. De telles solutions seront exclues dans la suite de cet Article, et nous nous proposons d'exprimer en fonction d'un paramètre arbitraire les expressions les plus générales de $x_1, \ldots, x_n$ satisfaisant à l'équation (1), *ces expressions ne contenant aucun signe de quadrature*. C'est de cette manière qu'Euler a intégré le premier l'équation

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

et J.-A. Serret l'équation analogue

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

[*Voir* le tome XIII (1re série, p. 353) de ce Journal.]

Pour résoudre de cette manière l'équation (1), nous poserons

$$(2) \qquad dx_1 = a_1\,dx_n, \qquad dx_2 = a_2\,dx_n, \qquad \ldots, \qquad dx_{n-1} = a_{n-1}\,dx_n;$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ devront vérifier l'équation

$$(3) \qquad f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1) = 0.$$

Introduisons maintenant les quantités b_i définies par les relations

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} a_1 x_n - x_1 \quad = b_1, \\ a_2 x_n - x_2 \quad = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n-1} x_n - x_{n-1} = b_{n-1}; \end{array}\right.$$

si l'on différentie ces relations en tenant compte des équations (2), elles donneront

$$(5) \qquad \frac{db_1}{da_1} = \frac{db_2}{da_2} = \cdots = \frac{db_{n-1}}{da_{n-1}} = x_n.$$

La question proposée se trouve ainsi ramenée à la suivante : *Déterminer les fonctions les plus générales a_i, b_i d'un certain paramètre satisfaisant aux équations* (3) *et* (5). Ces fonctions une fois connues,

on aura

$$x_n = \frac{db_i}{da_i},$$

puis on déterminera $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ par les équations (4). Il est aisé de reconnaître que les formules (4) et (5) conduisent aux équations (2), et celles-ci, par leur combinaison avec la relation (3), donnent l'équation (1), qu'il s'agit de résoudre.

Prenons arbitrairement $n-1$ fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ d'un certain paramètre t, assujetties uniquement à vérifier l'équation (3). Il restera à exprimer, sans aucun signe d'intégration, les valeurs les plus générales de $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ satisfaisant aux relations

$$(6) \qquad \frac{db_1}{da_1} = \frac{db_2}{da_2} = \ldots = \frac{db_{n-1}}{da_{n-1}}.$$

Or la Géométrie a enseigné depuis longtemps le moyen de résoudre ce problème, au moins dans le cas où $n-1$ est égal à 2 ou à 3.

Posons

$$(7) \qquad U = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} \\ \frac{da_1}{dt} & \frac{da_2}{dt} & \ldots & \frac{da_{n-1}}{dt} \\ \frac{d^2 a_1}{dt^2} & \frac{d^2 a_2}{dt^2} & \ldots & \frac{d^2 a_{n-1}}{dt^2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^{n-2} a_1}{dt^{n-2}} & \frac{d^{n-2} a_2}{dt^{n-2}} & \ldots & \frac{d^{n-2} a_{n-1}}{dt^{n-2}} \end{vmatrix}.$$

Si l'on développe ce déterminant suivant les éléments de la première ligne, on aura

$$(8) \qquad U = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_{n-1} b_{n-1},$$

les fonctions λ vérifiant, d'après les propriétés élémentaires des déterminants, les relations

$$(9) \qquad \begin{cases} \lambda_1 da_1 + \ldots + \lambda_{n-1} da_{n-1} = 0, \\ \lambda_1 d^2 a_1 + \ldots + \lambda_{n-1} d^2 a_{n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_1 d^{n-2} a_1 + \ldots + \lambda_{n-1} d^{n-2} a_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Cet ensemble de formules se rencontre soit dans la théorie du contact, soit dans celle des équations différentielles linéaires. Par des différentiations répétées, on en déduit, comme on sait, une série d'équations comprises dans le type suivant :

$$(10)\qquad d^i\lambda_1\, d^k a_1 + d^i\lambda_2\, d^k a_2 + \ldots + d^i\lambda_{n-1}\, d^k a_{n-1} = 0,$$

où l'on a

$$i + k < n - 1, \qquad k \geq 1, \qquad i \geq 0.$$

Quand i est égal à 0, il faut remplacer $d^0\lambda_h$ par λ_h.

Écrivons toutes celles de ces relations pour lesquelles k est égal à 1. Nous aurons le système

$$(11)\qquad \begin{cases} \lambda_1\, da_1 + \ldots + \lambda_{n-1}\, da_{n-1} = 0, \\ d\lambda_1\, da_1 + \ldots + d\lambda_{n-1}\, da_{n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d^{n-3}\lambda_1\, da_1 + \ldots + d^{n-3}\lambda_{n-1}\, da_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Si nous remplaçons maintenant les différentielles da_1, ... par les différentielles db_1, ... qui doivent leur être proportionnelles, nous serons conduits au système suivant :

$$(12)\qquad \begin{cases} \lambda_1\, db_1 + \ldots + \lambda_{n-1}\, db_{n-1} = 0, \\ d\lambda_1\, db_1 + \ldots + d\lambda_{n-1}\, db_{n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d^{n-3}\lambda_1\, db_1 + \ldots + d^{n-3}\lambda_{n-1}\, db_{n-1} = 0, \end{cases}$$

qui va nous conduire au résultat cherché.

Si l'on différentie en effet l'équation (8) en tenant compte successivement des différentes formules (12), on obtiendra le système suivant :

$$(13)\qquad \begin{cases} U = b_1\lambda_1 + \ldots + b_{n-1}\lambda_{n-1}, \\ \dfrac{dU}{dt} = b_1\dfrac{d\lambda_1}{dt} + \ldots + b_{n-1}\dfrac{d\lambda_{n-1}}{dt}, \\ \dfrac{d^2U}{dt^2} = b_1\dfrac{d^2\lambda_1}{dt^2} + \ldots + b_{n-1}\dfrac{d^2\lambda_{n-1}}{dt^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^{n-2}U}{dt^{n-2}} = b_1\dfrac{d^{n-2}\lambda_1}{dt^{n-2}} + \ldots + b_{n-1}\dfrac{d^{n-2}\lambda_{n-1}}{dt^{n-2}}, \end{cases}$$

et il suffira évidemment de résoudre ces $n-1$ équations par rapport à $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ pour obtenir les valeurs de ces inconnues exprimées au moyen de la fonction tout à fait arbitraire U et de ses $n-2$ premières dérivées.

Supposons d'abord que le déterminant

$$(14) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_{n-1} \\ \frac{d\lambda_1}{dt} & \ldots & \frac{d\lambda_{n-1}}{dt} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^{n-2}\lambda_1}{dt^{n-2}} & \ldots & \frac{d^{n-2}\lambda_{n-1}}{dt^{n-2}} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Les formules (13) fourniront alors des valeurs bien déterminées de $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$; mais, de plus, tous les mineurs de Δ par rapport aux éléments de la dernière ligne ne pouvant être nuls, les équations (11) et (12) détermineront aussi sans ambiguïté les rapports mutuels de $da_1, \ldots, da_{n-1}$, ou de $db_1, \ldots, db_{n-1}$. Or les formules (12) peuvent être considérées comme une simple conséquence des équations (13); il suffit, par exemple, de différentier la première équation (13); en tenant compte de la seconde, on retrouvera la première des formules (12); et ainsi de suite. La comparaison des relations (11) et (12) montre alors immédiatement que, quelle que soit la fonction U, les quantités $b_1, \ldots, b_{n-1}$ déterminées par les formules (13) ont leurs différentielles proportionnelles à celles de $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Le problème que nous nous proposions est donc complètement résolu.

Dans le cas où les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, qui doivent satisfaire seulement à l'équation (3), ont été choisies de telle manière que le déterminant Δ soit nul, on peut raisonner de la manière suivante :

Soit

$$(15) \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ \frac{da_1}{dt} & \frac{da_2}{dt} & \ldots & \frac{da_{n-1}}{dt} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^{n-2}a_1}{dt^{n-2}} & \ldots & \ldots & \frac{d^{n-2}a_{n-1}}{dt^{n-2}} \end{vmatrix}.$$

Si l'on pose

(16) $$A_{i,k} = \frac{d^i\lambda_1}{dt^i}\frac{d^k a_1}{dt^k} + \ldots + \frac{d^i\lambda_{n-1}}{dt^{n-1}}\frac{d^k a_{n-1}}{dt^k},$$

on aura

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{0,n-2} \\ A_{10} & \ldots & A_{1,n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n-2,0} & \ldots & A_{n-2,n-2} \end{vmatrix}.$$

En vertu de la formule (10), on a

$$A_{i,k} = 0$$

toutes les fois que i et k satisfont aux inégalités

$$i + k < n - 1, \qquad k \geq 1, \qquad i \geq 0;$$

on aura donc

(17) $$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} A_{00} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ A_{10} & 0 & \ldots & 0 & A_{1,n-2} \\ A_{20} & 0 & \ldots & A_{2,n-3} & A_{2,n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n-2,0} & A_{n-2,1} & \ldots & \ldots & A_{n-2,n-2} \end{vmatrix}$$

et, par conséquent,

(18) $$\Delta\Delta' = \pm A_{00} A_{1,n-2} A_{2,n-3} \ldots A_{n-2,1}.$$

Si l'on applique maintenant la formule évidente

$$\frac{dA_{ik}}{dt} = A_{i+1,k} + A_{i,k+1}$$

aux éléments $A_{0,n-2}$, $A_{1,n-3}$, $\ldots$, $A_{n-3,1}$ qui sont tous nuls, on aura

$$A_{1,n-2} + A_{0,n-1} = 0,$$

$$A_{2,n-3} + A_{1,n-2} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{n-2,1} + A_{n-3,2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$A_{n-2,1}=-A_{n-3,2}=\ldots=\pm A_{1,n-2}=\mp A_{0,n-1}.$$

Le produit $\Delta\Delta'$ prendra donc la forme très simple

$$(19)\qquad \Delta\Delta'=\pm A_{00}(A_{0,n-1})^{n-2}.$$

Pour que Δ soit nul, il faudra que l'on ait, soit

$$A_{00}=\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_{n-1}a_{n-1}=0,$$

soit

$$A_{0,n-1}=\lambda_1\frac{d^{n-1}a_1}{dt^{n-1}}+\cdots+\lambda_{n-1}\frac{d^{n-1}a_{n-1}}{dt^{n-1}}=0.$$

Si l'on se reporte à la définition des quantités λ par les formules (7) et (8), la première condition donne

$$\begin{vmatrix} a & \ldots & a_{n-1} \\ \frac{da_1}{dt} & \ldots & \frac{da_{n-1}}{dt} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{d^{n-2}a_1}{dt^{n-2}} & \ldots & \frac{d^{n-2}a_{n-1}}{dt^{n-2}} \end{vmatrix}=0.$$

On déduit de là, comme on sait, qu'il existe, entre les quantités a_i, une ou plusieurs relations linéaires et homogènes à coefficients constants.

La seconde condition donne de même

$$\begin{vmatrix} \frac{da_1}{dt} & \ldots & \frac{da_{n-1}}{dt} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{d^{n-1}a_1}{dt^{n-1}} & \ldots & \frac{d^{n-1}a_{n-1}}{dt^{n-1}} \end{vmatrix}=0,$$

et elle exprime aussi qu'il existe, entre les a_i, une ou plusieurs relations linéaires à coefficients constants; mais ces relations ne sont plus nécessairement homogènes.

En résumé, on voit que le cas d'exception dans lequel le déterminant des équations (13) est nul ne pourra se présenter que s'il existe entre les quantités a_i une ou plusieurs relations de la forme

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_{n-1} a_{n-1} + k_n = 0,$$

où $k_1, \ldots, k_n$ désignent des constantes. En remplaçant les a_i par leurs valeurs tirées des formules (2), on aura

$$k_1 dx_1 + \ldots + k_n dx_n = 0$$

ou, en intégrant,

$$k_1 x_1 + \ldots + k_n x_n = k.$$

Au moyen de ces relations on pourra donc éliminer de l'équation proposée (1) un certain nombre des quantités x_i; on sera ainsi amené à résoudre une équation de même forme, contenant moins de variables et pour laquelle le cas exceptionnel ne se représentera pas.

Au raisonnement précédent, qui offre l'avantage de mettre en évidence une relation intéressante entre les déterminants Δ, Δ', on peut substituer le suivant, qui est beaucoup plus simple. Si l'on a

$$\Delta = 0,$$

il y aura, comme on sait, une ou plusieurs relations linéaires et homogènes entre les quantités λ_i. Soit

$$h_1 \lambda_1 + h_2 \lambda_2 + \ldots + h_{n-1} \lambda_{n-1} = 0$$

l'une quelconque d'entre elles. En remplaçant les λ par leur valeur, on aura

$$\begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \ldots & h_{n-1} \\ da_1 & da_2 & \ldots & da_{n-1} \\ d^2 a_1 & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ d^{n-2} a_1 & \ldots\ldots & \ldots & d^{n-2} a_{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation conserve la même forme, les constantes h_i changeant

seulement de valeur, lorsqu'on effectue sur les a_i une substitution linéaire quelconque. Choisissons cette substitution de telle manière que toutes les constantes, sauf h_1, se réduisent à zéro; l'équation deviendra

$$\begin{vmatrix} da'_2 & \dots & da'_{n-1} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ d^{n-2}a'_2 & \dots & d^{n-2}a'_{n-1} \end{vmatrix} = 0;$$

sous cette forme, on reconnaît immédiatement qu'elle entraîne au moins une relation linéaire entre les quantités a'_i et, par suite, entre les quantités a_i.

II.

Nous appliquerons d'abord la méthode générale précédente à l'équation d'Euler

$$dx^2+dy^2=ds^2. \tag{20}$$

On résoudra *algébriquement* cette équation en posant

$$dx=ds\cos\theta,\qquad dy=ds\sin\theta. \tag{21}$$

On fera ensuite

$$\begin{cases} x-s\cos\theta=a, \\ y-s\sin\theta=b, \end{cases} \tag{22}$$

et l'on aura, en différentiant,

$$s=\frac{db}{\cos\theta\,d\theta}=\frac{-da}{\sin\theta\,d\theta}. \tag{23}$$

Pour déterminer a et b, on prendra

$$a\cos\theta+b\sin\theta=\mathrm{U}, \tag{24}$$

et cette équation donnera par la différentiation, en tenant compte de la précédente,

$$-a\sin\theta+b\cos\theta=\frac{d\mathrm{U}}{d\theta}. \tag{25}$$

Les formules ainsi obtenues déterminent a, b, s, x, y en fonction de θ; on en déduit le système

$$(26)\quad \begin{cases} x\sin\theta - y\cos\theta + \dfrac{dU}{d\theta} = 0, \\ x\cos\theta + y\sin\theta + \dfrac{d^2U}{d\theta^2} = 0, \\ s = U + \dfrac{d^2U}{d\theta^2}, \end{cases}$$

qui est connu et employé depuis longtemps.

Comme on a

$$(27)\quad \begin{cases} \tang\theta = \dfrac{dy}{dx}, \\ U = s - x\cos\theta - y\sin\theta, \end{cases}$$

on voit que, pour toute courbe algébrique dont l'arc est algébrique, U est nécessairement une fonction algébrique des lignes trigonométriques de θ. Les formules d'Euler font donc connaître toutes les lignes planes algébriques dont l'arc est une fonction algébrique des coordonnées du point de contact.

Chaque courbe algébrique dont l'arc est algébrique a évidemment toutes ses développantes algébriques. On obtient donc en bloc toutes les courbes algébriques, algébriquement rectifiables, en considérant toutes les développées des courbes algébriques. Mais on peut se placer à un point de vue tout différent dans la recherche de ces courbes, et se proposer, par exemple, la détermination de toutes les courbes planes, de classe ou de degré donné, qui sont algébriquement rectifiables. Nous nous contenterons de signaler aux géomètres cette intéressante question, dont la solution serait sans doute rendue possible par les belles propositions que nous devons à M. Halphen sur les développées des courbes planes algébriques.

Considérons maintenant l'équation

$$(28)\qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

qui a été, comme nous l'avons déjà rappelé, l'objet des études de M. J.-A. Serret.

Nous ferons

$$(29) \qquad \frac{dx}{ds}=x_0, \qquad \frac{dy}{ds}=y_0, \qquad \frac{dz}{ds}=z_0,$$

et nous prendrons pour x_0, y_0, z_0 trois fonctions d'un même paramètre t, assujetties uniquement à vérifier l'équation

$$(30) \qquad x_0^2+y_0^2+z_0^2=1.$$

Nous poserons ensuite, conformément à la méthode générale,

$$(31) \qquad \begin{cases} x=x_0 s+X_0, \\ y=y_0 s+Y_0, \\ z=z_0 s+Z_0. \end{cases}$$

En différentiant, nous aurons

$$(32) \qquad -s=\frac{dX_0}{dx_0}=\frac{dY_0}{dy_0}=\frac{dZ_0}{dz_0}.$$

Pour déterminer sans aucun signe de quadrature les fonctions X_0, Y_0, Z_0, il suffit d'interpréter géométriquement les relations précédentes. Les deux courbes (Γ_0), décrite par le point (X_0, Y_0, Z_0), et (γ_0), décrite par le point (x_0, y_0, z_0), doivent avoir à chaque instant leurs tangentes, et par suite leurs plans osculateurs, parallèles. Donc la courbe (Γ_0) sera l'arête de rebroussement d'une surface développable dont les plans tangents seront parallèles aux plans osculateurs de (γ_0). D'après cela, si l'on considère l'équation

$$X\left(\frac{dy_0}{dt}\frac{d^2z_0}{dt^2}-\frac{dz_0}{dt}\frac{d^2y_0}{dt^2}\right)+Y\left(\frac{dz_0}{dt}\frac{d^2x_0}{dt^2}-\frac{dx_0}{dt}\frac{d^2z_0}{dt^2}\right)$$
$$+Z\left(\frac{dx_0}{dt}\frac{d^2y_0}{dt^2}-\frac{dy_0}{dt}\frac{d^2x_0}{dt^2}\right)-U=\Phi=0,$$

où U est une fonction quelconque de t, les valeurs de X, Y, Z déduites des trois équations

$$(33) \qquad \Phi=0, \qquad \frac{d\Phi}{dt}=0, \qquad \frac{d^2\Phi}{dt^2}=0$$

seront précisément celles de X_0, Y_0, Z_0. La méthode géométrique s'accorde ici complètement avec notre théorie générale.

Une fois les valeurs de X_0, Y_0, Z_0 déterminées, les formules feront connaître s et x, y, z en fonction du paramètre variable t.

Pour toute courbe algébrique dont l'arc est algébrique, x_0, y_0, z_0 seront évidemment des fonctions algébriques d'un paramètre convenablement choisi. Il en sera de même de X_0, Y_0, Z_0 en vertu des formules (31) et, par conséquent, aussi de U. Il faut donc, pour obtenir toutes les courbes gauches algébriques dont l'arc est algébrique, prendre pour U, x_0, y_0, z_0 des fonctions algébriques d'un même paramètre, assujetties uniquement à vérifier l'équation (30).

On peut retrouver par une voie entièrement géométrique la solution que nous venons de donner et établir, sans aucun calcul, les relations qui existent entre les courbes (γ_0), (Γ_0) et la courbe cherchée (C), lieu du point (x, y, z). Étant donnée la courbe sphérique (γ_0), construisons, comme il a été indiqué, la courbe (Γ_0) dont les tangentes sont parallèles à celles de (γ_0). Aux points correspondants des deux courbes, les plans osculateurs seront parallèles; par suite, les angles de contingence et de torsion relatifs à deux arcs infiniment petits correspondants des deux courbes seront égaux. Or on sait que, pour obtenir une développée quelconque d'une courbe gauche, il faut mener en chaque point de cette courbe une normale faisant avec la normale principale un angle égal à

$$\int \frac{ds}{\tau},$$

ds désignant la différentielle de l'arc, et τ le rayon de torsion.

Il suit de là que, si, aux deux points correspondants de (γ_0) et de (Γ_0), on mène deux normales parallèles dont l'une touche une développée de (γ_0), l'autre enveloppera une développée de (Γ_0). Considérons, en particulier, celle des développées de (γ_0) qui se réduit à un point, le centre de la sphère sur laquelle est décrite (γ_0); nous serons ainsi conduits à la proposition suivante :

Étant donnée la courbe sphérique (γ_0) *et la courbe quelconque* (Γ_0) *dont les tangentes sont parallèles à celles de* (γ_0), *menons par chaque point de* (Γ_0) *la parallèle au rayon de la sphère contenant*

(γ_0) qui passe au point correspondant de cette dernière courbe. Cette parallèle enveloppera une développée de (Γ_0).

Cette développée est précisément la courbe (C) que la méthode analytique précédente nous enseigne à déterminer. Réciproquement, étant donnée une courbe (C) dont l'arc s'exprime sans aucun signe de quadrature, construisons une de ses développantes (Γ_0), et, par le centre d'une sphère de rayon 1, menons aux tangentes de (C) des parallèles qui détermineront sur la sphère la courbe (γ_0). Il est clair que (C) se déduira au moyen de (γ_0) et de (Γ_0) par la construction que nous venons d'indiquer, et, par suite, cette construction donnera bien toutes les courbes dont l'arc s'exprime sans aucun signe de quadrature.

Il nous reste à indiquer comment on déterminera les valeurs définitives de x, y, z, s en fonction du paramètre t. Les équations (33) sont de la forme

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} &X_0(y'_0 z''_0 - z'_0 y''_0) + \ldots &&= U,\\ &X_0(y'_0 z'''_0 - z'_0 y'''_0) + \ldots &&= U',\\ &X_0(y'_0 z^{\text{IV}}_0 - z'_0 y^{\text{IV}}_0 + y''_0 z'''_0 - z''_0 y'''_0) + \ldots &&= U''. \end{aligned}\right.$$

Résolues par rapport à X_0, Y_0, Z_0, elles donneront, pour ces quantités, des valeurs que l'on peut toujours écrire de la manière suivante :

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} X_0 &= \lambda x'_0 + \mu x''_0 + \nu x'''_0,\\ Y_0 &= \lambda y'_0 + \mu y''_0 + \nu y'''_0,\\ Z_0 &= \lambda z'_0 + \mu z''_0 + \nu z'''_0, \end{aligned}\right.$$

λ, μ, ν étant convenablement choisis. Pour déterminer ces trois paramètres, nous porterons les valeurs de X_0, Y_0, Z_0 dans les équations qu'elles doivent vérifier, et nous obtiendrons le résultat suivant

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} \nu(123) &= U,\\ -\mu(123) &= U',\\ \lambda(123) - \mu(124) - \nu(134) &= U''. \end{aligned}\right.$$

où l'on désigne, pour abréger, par (ikl) le déterminant

$$\begin{vmatrix} x^{(i)} & x^{(k)} & x^{(l)} \\ y^{(i)} & y^{(k)} & y^{(l)} \\ z^{(i)} & z^{(k)} & z^{(l)} \end{vmatrix},$$

formé avec les dérivées d'ordres i, k, l de x, y, z.

Posons

$$(37)\qquad (123) = \Delta, \qquad (134) = D.$$

En différentiant la première de ces équations, nous aurons

$$(124) = \Delta',$$
$$(134) + (125) = \Delta'',$$

et les formules (36) nous donneront alors

$$(38)\qquad \begin{cases} \mu = \dfrac{-U'}{\Delta}, & \nu = \dfrac{U}{\Delta}, \\ \lambda = \dfrac{U''}{\Delta} - \dfrac{U'\Delta'}{\Delta^2} + \dfrac{DU}{\Delta^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{U'}{\Delta}\right) + \dfrac{DU}{\Delta^2}. \end{cases}$$

En portant ces valeurs de λ, μ, ν dans les équations (35), nous avons

$$(39)\qquad \begin{cases} X_0 = \left[\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{U'}{\Delta}\right) + \dfrac{DU}{\Delta^2}\right] x'_0 - \dfrac{U' x''_0}{\Delta} + \dfrac{U x'''_0}{\Delta}, \\ Y_0 = \left[\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{U'}{\Delta}\right) + \dfrac{DU}{\Delta^2}\right] y'_0 - \dfrac{U' y''_0}{\Delta} + \dfrac{U y'''_0}{\Delta}, \\ Z_0 = \left[\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{U'}{\Delta}\right) + \dfrac{DU}{\Delta^2}\right] z'_0 - \dfrac{U' z''_0}{\Delta} + \dfrac{U z'''_0}{\Delta}. \end{cases}$$

Il nous reste à trouver la valeur de s. Différentions la dernière des équations (34) en y remplaçant dX_0, dY_0, dZ_0 par leurs valeurs $-s\,dx_0$, $-s\,dy_0$, $-s\,dz_0$. Nous trouverons

$$s\Delta = -U''' + 2\lambda(124) - 2\nu(234) - \mu(125) - \nu(135).$$

L'équation

$$(134)=\mathrm{D},$$

qui sert de définition à D, nous donne par différentiation

$$(135)+(234)=\mathrm{D}'$$

ou

$$(135)=\mathrm{D}'-\mathrm{E},$$

en posant

$$(234)=\mathrm{E}.$$

L'expression de s prend alors la forme

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} s = -\frac{\mathrm{U}'''}{\Delta}+\frac{2\Delta'}{\Delta^2}\mathrm{U}''+\mathrm{U}'\left(\frac{\Delta''}{\Delta^2}-\frac{2\Delta'}{\Delta^3}-\frac{\mathrm{D}}{\Delta^2}\right)\\ +\mathrm{U}\left(\frac{2\mathrm{D}\Delta'}{\Delta^3}-\frac{\mathrm{E}}{\Delta^2}-\frac{\mathrm{D}'}{\Delta^2}\right)\end{aligned}\right.$$

ou, plus simplement,

$$(40\,bis)\qquad s=-\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\mathrm{U}'}{\Delta}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{UD}}{\Delta^2}\right)-\frac{\mathrm{EU}}{\Delta^2}.$$

Il suffira maintenant de porter les valeurs de s, X_0, Y_0, Z_0 dans les formules (31) pour obtenir les expressions définitives de x, y, z.

III.

La méthode générale que nous venons d'appliquer à deux exemples remarquables peut être modifiée d'une manière avantageuse dans certains cas particuliers. Nous choisirons comme exemple l'équation

$$(41)\qquad dx^2+dy^2+dz^2=dx_1^2+dy_1^2+dz_1^2,$$

au sujet de laquelle nous avons à modifier et à compléter les résultats donnés dans notre précédent travail.

On peut la résoudre en prenant

$$(42)\quad \begin{cases} dx = a\,dx_1 + a'\,dy_1 + a''\,dz_1, \\ dy = b\,dx_1 + b'\,dy_1 + b''\,dz_1, \\ dz = c\,dx_1 + c'\,dy_1 + c''\,dz_1, \end{cases}$$

$a, b, c, \ldots$ étant des fonctions d'un paramètre t assujetties à vérifier les équations

$$(43)\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, & aa' + bb' + cc' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que le déterminant des neuf quantités $a, b, c, \ldots$ est égal à 1. S'il en était autrement, il suffirait de changer le signe de x_1, y_1, z_1.

Introduisons les arbitraires α, β, γ définies par les relations

$$(44)\quad \begin{cases} x = ax_1 + a'y_1 + a''z_1 + \alpha, \\ y = bx_1 + b'y_1 + b''z_1 + \beta, \\ z = cx_1 + c'y_1 + c''z_1 + \gamma, \end{cases}$$

et différentions ces relations; en tenant compte des précédentes (42), nous aurons

$$(45)\quad \begin{cases} 0 = x_1\,da + y_1\,da' + z_1\,da'' + d\alpha, \\ 0 = x_1\,db + y_1\,db' + z_1\,db'' + d\beta, \\ 0 = x_1\,dc + y_1\,dc' + z_1\,dc'' + d\gamma. \end{cases}$$

D'après des propositions bien connues, on peut exprimer les différentielles $da, db, \ldots$ en fonction de trois arbitraires p, q, r, par les relations

$$(46)\quad \begin{cases} da = (br - cq)\,dt, & db = (cp - ar)\,dt, & dc = (aq - bp)\,dt, \\ da' = (b'r - c'q)\,dt, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ da'' = (b''r - c''q)\,dt; & \ldots\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (45), on aura, en tenant compte des formules (44),

$$(47)\quad \begin{cases} q(z-\gamma)-r(y-\beta)=\dfrac{d\alpha}{dt}, \\ r(x-\alpha)-p(z-\gamma)=\dfrac{d\beta}{dt}, \\ p(y-\beta)-q(x-\alpha)=\dfrac{d\gamma}{dt}. \end{cases}$$

Il suffira donc, pour que l'équation proposée (41) soit vérifiée, que x, y, z; x_1, y_1, z_1 satisfassent aux équations (44) et (47). Mais il importe de remarquer que α, β, γ ne peuvent être choisis arbitrairement. En effet, si l'on ajoute les équations précédentes après les avoir multipliées respectivement par p, q, r, on obtient la condition

$$(48)\qquad p\frac{d\alpha}{dt}+q\frac{d\beta}{dt}+r\frac{d\gamma}{dt}=0,$$

à laquelle doivent satisfaire α, β, γ.

Pour obtenir sans aucun signe de quadrature les valeurs de α, β, γ vérifiant l'équation précédente, il suffit de poser

$$(49)\qquad p\alpha+q\beta+r\gamma=\mathrm{U}.$$

En différentiant et tenant compte de l'équation (48), on aura

$$(50)\qquad \alpha\frac{dp}{dt}+\beta\frac{dq}{dt}+\gamma\frac{dr}{dt}=\frac{d\mathrm{U}}{dt},$$

et les valeurs de α, β, γ devront vérifier ces deux dernières équations, où U sera une fonction tout à fait arbitraire.

En résumé, on prendra pour a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' des fonctions quelconques de t assujetties uniquement à vérifier les relations bien connues (43) entre les neuf cosinus. On choisira pour α, β, γ trois nouvelles fonctions satisfaisant aux deux équations (49) et (50). Les valeurs de x, y, z seront données par le système (47) et celles de x_1, y_1, z_1 par le système (44). Comme les trois équations (47) se

réduisent à deux et ne peuvent déterminer complètement x, y, z, il faudra leur adjoindre une relation quelconque

$$f(x, y, z) = 0$$

qui permettra de déterminer x, y, z. Ainsi la courbe lieu du point (x, y, z) pourra être tracée sur une surface quelconque.

Une interprétation géométrique très simple jettera beaucoup de lumière sur la solution précédente.

Si, dans l'équation à résoudre, on regarde x, y, z et x_1, y_1, z_1 comme les coordonnées rectangulaires de deux points, le problème proposé s'énoncera de la manière suivante : *Déterminer dans l'espace, sans aucun signe de quadrature, deux courbes se correspondant point par point de telle manière que les arcs correspondants des deux courbes soient égaux.*

Examinons maintenant la solution. Considérons dans les formules (44) x, y, z comme les coordonnées d'un point de l'espace rapporté à des axes mobiles Ox, Oy, Oz et x_1, y_1, z_1 comme les coordonnées du même point rapportées à des axes fixes $O_1 x_1$, $O_1 y_1$, $O_1 z_1$. Ces formules définiront un déplacement dans lequel la variable t jouera le rôle du temps; et les quantités p, q, r désigneront à chaque instant les composantes de la rotation infiniment petite du système mobile, prises par rapport aux axes mobiles. Cela posé, les équations (42) qui nous ont servi de point de départ expriment qu'il existe une courbe (C) de la figure mobile roulant sur une courbe (C_1) du système fixe; et, par conséquent, le point de contact des deux courbes à l'instant considéré a nécessairement une vitesse nulle. Pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment que tous les mouvements infiniment petits, successifs, du système mobile ne soient pas des mouvements hélicoïdaux, mais se réduisent à de simples rotations. C'est la condition exprimée par l'équation (48), que l'on peut obtenir immédiatement en écrivant que la vitesse de l'origine des axes mobiles est perpendiculaire à la direction de l'axe de rotation.

Nous avons indiqué le moyen de résoudre cette équation sans aucun signe de quadrature; et nous connaissons ainsi les mouvements dans lesquels chaque déplacement infiniment petit équivaut à une rotation.

On obtient, comme on sait, tous ces mouvements en faisant rouler une surface réglée (K) sur une autre surface réglée (K_1), applicable sur la première. L'équation de la surface (K) résulterait de l'élimination de t entre les deux équations auxquelles se réduit le système (47). On aurait la surface (K_1) en éliminant t, x, y, z entre les équations (44) et (47) ou, ce qui est la même chose, en éliminant t entre les équations

$$(51)\quad \left\{ \begin{aligned} q(cx_1 + c'y_1 + c''z_1) - r(bx_1 + b'y_1 + b''z_1) &= \frac{d\alpha}{dt}, \\ r(ax_1 + a'y_1 + a''z_1) - p(cx_1 + c'y_1 + c''z_1) &= \frac{d\beta}{dt}, \\ p(bx_1 + b'y_1 + b''z_1) - q(ax_1 + a'y_1 + a''z_1) &= \frac{d\gamma}{dt}, \end{aligned} \right.$$

qui se réduisent également à deux.

Des remarques précédentes on déduit une première conséquence qui mérite d'être signalée : *On peut obtenir sans aucun signe de quadrature les équations les plus générales de deux surfaces réglées applicables l'une sur l'autre.*

Coupons maintenant la surface réglée (K) par une surface quelconque :

$$f(x, y, z) = 0.$$

Nous obtiendrons une certaine courbe (C) qui roulera sur la courbe correspondante (C_1) de la surface (K_1). *Les deux courbes* (C) *et* (C_1) *sont précisément celles que notre solution analytique nous a appris à déterminer.*

Nous rappellerons, en terminant, une solution toute différente que nous avons aussi donnée de la même question.

Si, dans l'équation (41), on pose

$$(52)\quad \left\{ \begin{aligned} x - x_1 &= X, \\ y - y_1 &= Y, \\ z - z_1 &= Z; \end{aligned} \right.$$

$$(53)\quad \left\{ \begin{aligned} x + x_1 &= X_1, \\ y + y_1 &= Y_1, \\ z + z_1 &= Z_1, \end{aligned} \right.$$

elle apparaît sous la forme

$$(54) \qquad dX\,dX_1 + dY\,dY_1 + dZ\,dZ_1 = 0.$$

Prenons arbitrairement pour X_1, Y_1, Z_1 des fonctions d'un paramètre t et posons

$$(55) \qquad X\,dX_1 + Y\,dY_1 + Z\,dZ_1 = U\,dt;$$

si l'on différentie cette équation, en tenant compte de la précédente, on aura

$$(56) \qquad X\,d^2X_1 + Y\,d^2Y_1 + Z\,d^2Z_1 = dU\,dt,$$

et réciproquement les deux équations (55) et (56) entraînent la relation (54).

Il suffira donc de prendre pour X, Y, Z des fonctions satisfaisant aux deux équations (55) et (56); ce qui permettra, par exemple, de déterminer l'une d'elles arbitrairement ou de donner *a priori* une relation quelconque

$$\varphi(X, Y, Z) = 0$$

entre X, Y, Z.

Supposons, pour indiquer une application, que l'on veuille trouver deux courbes dont les arcs soient égaux, les points correspondants se trouvant à une distance toujours la même, l. On fera

$$(57) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = l^2$$

et l'on aura à résoudre les trois équations (55), (56) et (57).

Prenons comme inconnue auxiliaire le déterminant

$$(58) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{dX_1}{dt} & \dfrac{dY_1}{dt} & \dfrac{dZ_1}{dt} \\ \dfrac{d^2X_1}{dt^2} & \dfrac{d^2Y_1}{dt^2} & \dfrac{d^2Z_1}{dt_2} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \Delta.$$

Si on l'élève au carré et si l'on pose, pour abréger,

$$ds_1^2 = dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2, \qquad \left(\frac{d^2X_1}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Y_1}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Z_1}{dt^2}\right)^2 = H^2,$$

on trouvera

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 & \frac{ds_1}{dt}\frac{d^2s_1}{dt^2} & U \\ \frac{ds_1}{dt}\frac{d^2s_1}{dt^2} & H^2 & \frac{dU}{dt} \\ U & \frac{dU}{dt} & l^2 \end{vmatrix}.$$

Δ sera donc connu et, pour déterminer X, Y, Z, il suffira de joindre l'équation du premier degré (58) aux deux équations (55) et (56).

On pourrait encore joindre à ces deux équations, qui donnent la solution de la question proposée, une relation quelconque entre X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1. Supposons, par exemple, que l'on demande de déterminer les deux courbes (C), (C_1) de telle manière que deux points correspondants quelconques des deux courbes soient toujours à la même distance de l'origine. On aura

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

ou

$$XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = 0.$$

Cette relation, jointe aux équations (55) et (56), fera connaître X, Y, Z sans aucune difficulté.

Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques;

PAR M. G. HUMBERT.

---

1. Le but de ce Mémoire est de démontrer une formule qui permet, étant données une courbe algébrique $f = 0$, de degré n, et une intégrale abélienne quelconque appartenant à cette courbe, de calculer *a priori* la somme des variations de l'intégrale sur les lignes décrites par les points d'intersection de la courbe proposée et d'une courbe algébrique variable, appartenant à un faisceau. Si l'on désigne par $F - u\varphi = 0$ l'équation des courbes de ce faisceau, la somme cherchée sera une fonction du paramètre u, et l'étude de ses variations, quand on fait varier le paramètre, donne lieu à des conséquences analytiques intéressantes, se traduisant géométriquement d'une manière souvent très simple.

L'emploi des fonctions fuchsiennes, introduites dans la Science par M. Poincaré, nous a permis d'arriver simplement au résultat cherché (1).

(1) Nous devons, à cette occasion, rectifier une erreur que nous avons commise dans un Mémoire, publié dans ce Journal, sur l'*Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques*. Nous avons attribué à Clebsch (n° 18) la théorie des *groupes de points* sur une courbe : c'est à MM. Brill et Nöther que revient l'honneur d'avoir établi et développé d'une manière si remarquable cette importante théorie.

La première Partie du présent travail est consacrée à la démonstration et à l'étude des conséquences analytiques de la formule fondamentale; on examine spécialement le cas où l'intégrale abélienne se réduit à une fonction rationnelle, et l'on en déduit le moyen de trouver la somme ou le produit des valeurs que prend une fonction rationnelle des coordonnées aux points communs à deux courbes algébriques, et de discuter cette somme ou ce produit quand une des courbes varie, sans cesser d'appartenir à un même faisceau.

La seconde Partie comprend les applications géométriques les plus simples de cette théorie : en considérant, soit une intégrale abélienne ayant une signification géométrique déterminée, soit une fonction rationnelle simple des coordonnées des points d'une courbe, on peut énoncer immédiatement des théorèmes géométriques, relatifs à la somme des valeurs que prennent cette intégrale et cette fonction aux points communs à la courbe proposée, et à chacune des courbes d'un faisceau. On a développé spécialement des applications relatives aux aires, aux directions et aux longueurs.

La troisième Partie a pour but de faire les mêmes applications aux arcs de courbe qui s'expriment par une intégrale abélienne appartenant à la courbe : les courbes qui jouissent de cette propriété sont celles que Laguerre a nommées *courbes de direction*.

Comme conséquence de cette théorie, on détermine les courbes curieuses dont l'arc s'exprime par une intégrale abélienne de première espèce; elles jouissent de cette propriété que la somme des arcs interceptés sur elles par deux courbes quelconques de même degré est toujours nulle.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉNONCÉ DU PROBLÈME.

2. Soit $f(\xi, \eta) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique plane de genre p et de degré n; considérons une intégrale abélienne quelconque

appartenant à cette courbe

$$I = \int \frac{Q(\xi, \eta)}{R(\xi, \eta)} d\xi,$$

où Q et R désignent respectivement des polynômes de degrés q et r.

Coupons la courbe $f = 0$ par deux courbes de degré m

$$F(\xi, \eta) - u_0 \varphi(\xi, \eta) = 0, \qquad F(\xi, \eta) - u \varphi(\xi, \eta) = 0,$$

u_0 et u désignant deux constantes; et soient

$$\xi_1^0, \quad \xi_2^0, \quad \ldots, \quad \xi_{mn}^0; \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_{mn}$$

les abscisses qui correspondent respectivement aux points d'intersection de ces courbes avec la courbe primitive.

On sait que l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \int_{\xi_i^0}^{\xi_i} \frac{Q(\xi, \eta)}{R(\xi, \eta)} d\xi$$

est la somme d'une fonction rationnelle et d'une fonction logarithmique des coefficients des fonctions f, F, φ et des paramètres u_0 et u. Pour calculer la valeur de cette expression, on peut, par exemple, décomposer l'intégrale I en éléments simples, c'est-à-dire :

1° En intégrales de fonctions rationnelles de ξ;

2° En intégrales abéliennes de première espèce;

3° En intégrales normales de seconde et de troisième espèce,

et calculer, en partant des théorèmes connus, les parties de la somme cherchée qui correspondent à chacun de ces éléments.

Cette méthode paraît être un peu compliquée au point de vue des applications; nous nous proposons, dans ce qui suit, d'établir une formule simple, qui permettra d'évaluer directement la somme cherchée; nous nous appuierons, dans ce but, sur la théorie des fonctions fuchsiennes, qui nous a déjà permis, dans un travail antérieur [1], d'établir le théorème d'Abel pour les intégrales de première espèce.

---

[1] *Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*; 1886).

Rappelons d'abord quelques considérations, développées dans ce travail, et qui se déduisent sans difficulté des belles recherches de M. Poincaré.

INTRODUCTION DES FONCTIONS FUCHSIENNES.

3. Les coordonnées des points d'une courbe algébrique plane, ayant pour équation en coordonnées ordinaires $f(\xi, \eta) = 0$, ou, en coordonnées homogènes (¹), $f(x, y, z) = 0$, peuvent toujours se mettre sous la forme

$$(1) \qquad x = \theta_1(t), \qquad y = \theta_2(t), \qquad z = \theta_3(t);$$

θ_1, θ_2, θ_3 étant des fonctions thètafuchsiennes holomorphes d'une variable t, et de *degré* μ; c'est-à-dire telles qu'on ait, en désignant par $\left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$ une quelconque des substitutions du groupe fuchsien G qui correspond à ces fonctions

$$\theta_i\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right) = \theta_i(t)(\gamma t + \delta)^{2\mu},$$

en supposant $\alpha\delta - \beta\gamma$ égal à l'unité.

Le polygone fuchsien R_0, qui correspond au groupe G, appartient à la première famille de M. Poincaré; il a $4p$ côtés (²); les côtés opposés sont conjugués deux à deux, c'est-à-dire transformés l'un dans l'autre par une des substitutions de G, et la somme des angles est égale à 2π.

La courbe représentée par les équations (1) est de genre p; son degré n est égal à $2\mu(p-1) - k$, k désignant le nombre des zéros communs aux trois fonctions θ_1, θ_2, θ_3, dans l'intérieur du polygone R_0.

(¹) Dans tout ce qui suit, ξ et η désigneront des coordonnées cartésiennes; x, y, z des coordonnées homogènes : on passera d'un système à l'autre en posant $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = \frac{y}{z}$.

(²) Si la courbe $f = 0$ était unicursale, on aurait recours à des polygones fuchsiens de la première famille, de genre zéro, et d'un nombre pair de côtés : les démonstrations seraient les mêmes que dans le cas général.

Rappelons enfin une propriété du polygone R_0 qui nous sera utile plus loin. Soient ab et $a_1 b_1$ deux côtés opposés de ce polygone, tels que les points a_1 et b_1 soient respectivement les transformés des points a et b par la substitution de G qui transforme ab en $a_1 b_1$: si l'on décrit le périmètre de R_0 en partant de a, dans le sens ab, le côté opposé sera parcouru dans le sens $b_1 a_1$.

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE FONDAMENTALE.

4. Cela posé, rendons l'intégrale I homogène en y remplaçant ξ et η par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, et substituons à x, y, z les valeurs $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_3(t)$, en fonction thêtafuchsienne de t. Il vient

$$I = \int \frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)} \frac{x'z - xz'}{z^{q-r+2}} dt.$$

x', y', z' désignant les dérivées de x, y, z par rapport à t.

Posons, pour abréger

$$\frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)} \frac{x'z - xz'}{z^{q-r-2}} = \zeta(t).$$

On a

$$I = \int \zeta(t)\, dt.$$

Je dis que la fonction $\zeta(t)$ est une fonction thêtafuchsienne de degré un. On peut écrire en effet

$$\zeta(t) = \frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z) z^{q-r}} \frac{d}{dt} \left| \frac{x(t)}{z(t)} \right|.$$

Or $\frac{Q}{R z^{q-r}}$ est une fonction fuchsienne de t, de groupe G, puisque le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de même degré q, en x, y, z, et que x, y, z sont des fonctions thêtafuchsiennes de groupe G et de même *degré* μ. La fonction $\frac{x}{z}(t)$ est pour la même raison une

fonction fuchsienne, et l'on a

$$\frac{x}{z}\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)=\frac{x}{z}(t);$$

d'où, en dérivant,

$$\frac{x'z-xz'}{z^2}\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)=\frac{x'z-xz'}{z^2}(t)(\gamma t+\delta)^2.$$

Par suite, on a bien

$$\zeta\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)=\zeta(t)(\gamma t+\delta)^2.$$

Pour évaluer la somme des intégrales I entre les points d'intersection de $f=0$ avec les courbes $F-u_0\,\varphi=0$, $F-u\,\varphi=0$, considérons l'intégrale

$$J=\int\frac{\zeta(t)\,dt}{\frac{F}{\varphi}-u},$$

F et φ étant les polynômes $F(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$, de degré m, où l'on a remplacé x, y, z par leurs valeurs en fonction thêtafuchsienne de t.

Je dis que la valeur de cette intégrale, le long du polygone R_0, est nulle.

Soient, en effet : t un point quelconque d'un côté ab, de R_0; t_1 le point correspondant sur le côté opposé a_1b_1, transformé de ab par la substitution $\left(t, \frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)$.

Les éléments de l'intégrale J qui correspondent à ces deux points sont, puisque les côtés ab et a_1b_1 sont parcourus en sens contraire, comme on l'a fait remarquer plus haut,

$$\frac{\zeta(t)\,dt}{\frac{F}{\varphi}(t)-u} \quad \text{et} \quad -\frac{\zeta(t_1)\,dt_1}{\frac{F}{\varphi}(t_1)-u}.$$

Or on a

$$t_1=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}, \qquad dt_1=dt(\gamma t+\delta)^2.$$

D'un autre côté, $\frac{F}{\varphi}(t)$ est une fonction fuchsienne de t, de groupe G, puisque $F(x, y, z)$ et $\varphi(x, y, z)$ sont des fonctions thêtafuchsiennes de même degré; il en résulte qu'on a, d'après ce qui précède :

$$\frac{\zeta(t_1)\,dt_1}{\frac{F}{\varphi}(t_1)-u} = \frac{\zeta(t)\,dt}{\frac{F}{\varphi}(t)-u},$$

et l'on voit que les éléments de l'intégrale J se détruisent deux à deux.

On a donc bien, le long de R_0,

$$J = 0.$$

Il résulte de là que la somme des résidus de la fonction uniforme de t

$$\Theta(t) = \frac{\zeta(t)}{\frac{F}{\varphi}(t)-u} = \frac{Q(x'z-xz')}{Rz^{q-r+2}\left(\frac{F}{\varphi}-u\right)} = \frac{Q}{Rz^{q-r}}\,\frac{1}{\frac{F}{\varphi}-u}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{z}\right),$$

dans l'intérieur de R_0, est nulle.

C'est en évaluant cette somme et en l'égalant à zéro, que nous arriverons à la formule que nous avons en vue.

5. Déterminons d'abord les infinis de $\Theta(t)$. Si l'on observe que cette fonction, mise sous la troisième forme ci-dessus, est homogène et de degré zéro en x, y, z, et par suite ne devient pas infinie pour la valeur de l'un des k zéros communs aux trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, on voit que les infinis de $\Theta(t)$ sont :

1° Les arguments des rn points communs aux courbes $f=0$, $R=0$, à moins que l'un ou plusieurs d'entre eux n'annulent aussi le numérateur de $\Theta(t)$, mis sous la seconde forme;

2° Les arguments des points à l'infini sur $f=0$: ces arguments sont des infinis d'ordre $q-r+2$; si $q-r+2$ est égal ou inférieur à zéro, ils ne sont plus des infinis;

3° Les arguments des points communs à la courbe $f=0$ et à la courbe $F-u\varphi=0$.

Les résidus qui correspondent aux infinis de cette dernière catégorie

prennent une forme remarquable. Soit α l'argument de l'un des points considérés; on a, pour le résidu, en supposant que α soit un zéro simple de $\frac{F}{\varphi} - u$,

$$r_\alpha = \frac{\zeta(\alpha)}{\left(\frac{F}{\varphi}\right)'_\alpha}.$$

Or, si dans la relation $\frac{F}{\varphi}(\alpha) - u = 0$, on considère α comme fonction de u, on a, en différentiant,

$$\left(\frac{F}{\varphi}\right)'_\alpha = \frac{du}{d\alpha};$$

d'où

$$r_\alpha = \frac{\zeta(\alpha)\, d\alpha}{du} = \frac{dI_\alpha}{du},$$

en désignant par dI_α la variation de l'intégrale I quand on passe du point d'argument α, de la courbe $f = 0$, situé sur la courbe $F - u\varphi = 0$, au point d'argument $\alpha + d\alpha$, situé sur la courbe $F - (u + du)\varphi = 0$.

FORMULE FONDAMENTALE.

6. Si donc on désigne par $\sum r_\beta$ la somme des résidus de la fonction

$$(2) \qquad \Theta(t) = \frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)} \frac{x'z - xz'}{z^{q-r+2}\left[\frac{F(x, y, z)}{\varphi(x, y, z)} - u\right]}$$

par rapport aux zéros de $R[x(t), y(t), z(t)]$; par $\sum r_\gamma$ la somme des résidus de la même fonction par rapport aux zéros de $z^{q-r+2} = 0$, on aura

$$(3) \qquad \sum \frac{dI}{du} = -\sum (r_\beta + r_\gamma);$$

d'où, en intégrant par rapport à u, entre les limites u_0 et u,

$$(3\ bis) \qquad \sum_{i=1}^{i=mn} \int_{\xi_i^0}^{\xi_i} \frac{Q(\xi, \eta_i)}{R(\xi, \eta_i)}\, d\xi = -\sum \int_{u_0}^{u} (r_\beta + r_\gamma)\, du.$$

C'est la formule qu'il s'agissait d'établir : on voit qu'on est ramené à calculer les résidus de la fonction $\Theta(t)$, ce qui ne présente aucune difficulté.

FORMES DIVERSES DE LA FORMULE FONDAMENTALE.

7. On peut d'ailleurs mettre cette formule sous une forme un peu plus simple. On a en effet, en coordonnées homogènes,

$$I = \int \frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)} \frac{z\,dx - x\,dz}{z^{q-r+2}},$$

ou

$$I = \int \frac{Q(x, y, z)}{S(x, y, z)} (z\,dx - x\,dz),$$

Q et S étant des polynômes homogènes en x, y, z dont les degrés sont respectivement q et $q+2$. La formule (3 *bis*) devient alors

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \int_{x_i^0}^{x_i} \frac{Q(x, y, z)}{S(x, y, z)} (z\,dx - x\,dz) = -\sum \int_{u_0}^{u} r_\beta\,du, \tag{4}$$

en désignant par $\sum r_\beta$ la somme des résidus, par rapport aux zéros de $S(x, y, z)$ de la fonction

$$\Theta(t) = \frac{Q(x, y, z)}{S(x, y, z)} \frac{x'z - z'x}{\frac{F}{\varphi}(x, y, z) - u}. \tag{5}$$

Plus simplement encore, dans le cas où l'intégrale I reste finie pour les points situés à l'infini sur la courbe $f(\xi, \eta) = 0$, on a

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \int_{\xi_i^0}^{\xi_i} \frac{Q(\xi, \eta)}{S(\xi, \eta)} d\xi = -\sum \int_{u_0}^{u} r_\beta\,du. \tag{6}$$

en désignant par Σr_β la somme des résidus, par rapport aux zéros de

$S(\xi, \eta)$, de la fonction

$$(7) \qquad \Theta(t) = \frac{Q(\xi, \eta)}{S(\xi, \eta)} \frac{\frac{d\xi}{dt}}{\frac{F}{\varphi}(\xi, \eta) - u}.$$

8. *Remarque*. — Il est évident *a priori* que les expressions $\sum(r_\beta + r_\gamma)$ ou $\sum r_\beta$, qui figurent dans les seconds membres des équations (3), (4) et (6), doivent être indépendantes des paramètres qui caractérisent le groupe fuchsien G, et ne dépendre que d'éléments géométriques appartenant à la courbe $f = 0$.

On peut d'ailleurs s'en rendre compte comme il suit :

Soit r_β le résidu de la fonction $\Theta(t)$, mise par exemple sous la forme (7), par rapport à un zéro, β, de $S(\xi, \eta)$, correspondant à un point ξ_β, η_β de la courbe $f = 0$.

La valeur de $2\pi i r_\beta$ est égale à l'intégrale $\int \Theta(t)\,dt$ le long d'un petit cercle enveloppant le point β et, par suite, si l'on passe du plan de la variable t au plan de la variable ξ, cette valeur est celle de l'intégrale

$$\int \Theta\, dt = \int \frac{Q(\xi, \eta)}{S(\xi, \eta)} \frac{d\xi}{\frac{F}{\varphi}(\xi, \eta) - u}$$

le long d'un petit contour enveloppant le point ξ_β : elle peut donc se calculer, indépendamment de la variable t, au moyen des valeurs de ξ, η et des dérivées de η par rapport à ξ, au point ξ_β.

CAS PARTICULIER DE LA FORMULE FONDAMENTALE.

9. Le cas où les infinis de la fonction $\Theta(t)$, correspondant aux zéros de S, sont tous simples, peuvent se traiter immédiatement.

Supposons, en effet, S étant toujours de degré $q + 2$, que la courbe $S = 0$ ne touche en aucun point la courbe $f = 0$. On aura, pour le résidu relatif à un infini β,

$$r_\beta = \left[\frac{Q(\xi, \eta) \frac{d\xi}{dt}}{\frac{dS}{dt}\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)} \right]_\beta;$$

or,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dS}{d\eta}\frac{d\eta}{dt},$$

$$0 = \frac{df}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{df}{d\eta}\frac{d\eta}{dt},$$

d'où

$$r_\beta = \left[\frac{Q(\xi, \eta) f'_\eta}{(S'_\xi f'_\eta - S'_\eta f'_\xi)\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}\right]_\beta,$$

et, par suite, appelant X_1, Y_1; X_2, Y_2, ... les coordonnées des points communs aux courbes $S = 0$, $f = 0$,

$$(8)\quad \sum_{i=1}^{i=mn} \int_{\xi_i^0}^{\xi_i} \frac{Q(\xi, \eta)}{S(\xi, \eta)} d\xi = \sum \frac{Q(X, Y)}{S'_X f'_Y - S'_Y f'_X} \log \frac{F(X, Y) - u\varphi(X, Y)}{F(X, Y) - u_0 \varphi(X, Y)}.$$

La somme, dans le second membre, doit porter sur les systèmes de valeurs de X, Y, qui vérifient les équations $S = 0$, $f = 0$.

CONSÉQUENCES ANALYTIQUES.

On peut déduire de la formule fondamentale plusieurs conséquences analytiques intéressantes.

10. Les infinis de l'intégrale $\int \frac{Q}{S}(z\,dx - x\,dz)$ sont les points où la courbe $S = 0$ rencontre la courbe $f = 0$, à moins que les arguments de ces points n'annulent Q ou $z\,dx - x\,dz$.

Supposons que la courbe $\varphi(x, y, z) = 0$ passe par les points de $f = 0$, qui sont les infinis de l'intégrale, en tenant compte de leur multiplicité, c'est-à-dire que, si un point correspond à un zéro d'ordre h pour la fonction $S[x(t), y(t), z(t)]$, la courbe $\varphi = 0$ ait en ce point, avec $f = 0$, un contact d'ordre $h - 1$. Admettons, de plus, que la courbe $F(x, y, z) = 0$ ne passe par aucun de ces points. La fonction

$$\Theta(t) = \frac{Q(x, y, z)}{S(x, y, z)} \frac{x'z - z'x}{\frac{F}{\varphi}(x, y, z) - u}$$

ne devient pas infinie pour les valeurs de t qui annulent S, puisque,

pour ces points, la fonction $\frac{SF}{\varphi}(x, y, z)$ reste finie; $\Theta(t)$ n'a donc pas d'autres infinis que ceux qui annulent $\frac{F}{\varphi} - u$, et, par suite, les résidus r_β sont nuls. On a donc

$$\sum \int_{x_i^0}^{x_i} \frac{Q(x, y, z)}{S(x, y, z)}(z\,dx - x\,dz) = 0,$$

et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Soit I *une intégrale abélienne quelconque relative à une courbe algébrique $f(x, y, z) = 0$, de degré n. La somme de mn intégrales* I, *dont les limites inférieures et supérieures sont respectivement les systèmes de valeurs de x, y, z, qui correspondent aux mn points d'intersection de la courbe $f = 0$ avec deux courbes quelconques de degré m est nulle, si, parmi les courbes du faisceau déterminé par les courbes sécantes, il en est une qui passe par tous les points de la courbe $f = 0$ rendant l'intégrale infinie.*

La somme est nulle, en particulier, si les courbes sécantes coupent aux mêmes points la courbe $S = 0$, parce qu'alors une des courbes du faisceau comprend la courbe $S = 0$ elle-même.

Il y aurait *exception au théorème précédent*, si *toutes* les courbes du faisceau considéré passaient par un ou plusieurs des points qui rendent l'intégrale infinie, parce que, alors, F et φ s'annulant tous deux en ces points, la fonction $\Theta(t)$ pourrait y devenir infinie et l'on ne saurait affirmer que le résidu correspondant, r_β, est nul.

11. Le cas où le dénominateur S est divisible par f'_y est particulièrement intéressant : soit $S = Tf'_y$, T étant de degré $q + 3 - n$.

Nous allons montrer que la somme de ceux des résidus de la fonction $\Theta(t)$, qui correspondent aux zéros de f'_y, est nulle.

Les zéros de la fonction $f'_y(x, y, z)$ sont en effet de deux sortes : les uns correspondent aux points de contact des tangentes qu'on peut mener à la courbe $f(x, y, z) = 0$ par le point $x = 0$, $z = 0$; les autres correspondent aux points singuliers de cette courbe.

Si β est l'argument d'un des zéros de la première catégorie, la fonc-

tion $x'z - xz'$ s'annule pour $t = \beta$. On a, en effet,

$$x'\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + z'\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

et

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{x'z - xz'}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{y'x - yx'}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = \frac{z'y - zy'}{\dfrac{\partial f}{\partial x}},$$

et, par suite, si $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ s'annule sans que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ s'annulent également (c'est-à-dire si le point d'argument β n'est pas un point singulier), il faut qu'on ait, pour $t = \beta$,

$$x'z - xz' = 0.$$

Il en résulte que, pour chercher les résidus de la fonction

$$\Theta(t) = \frac{Q(x'z - xz')}{T f'_y\left(\dfrac{F}{\varphi} - u\right)}$$

correspondant aux zéros de f'_y, on n'aura à tenir compte que des arguments des points singuliers de la courbe $f = 0$.

Soit, pour plus de simplicité, A un point double de cette courbe, de coordonnées a et b, auquel correspondent les valeurs γ et δ de l'argument t.

On aura, pour le résidu de $\Theta(t)$ relatif à l'une de ces valeurs, γ par exemple, en revenant à la forme (7) de $\Theta(t)$,

$$r_\gamma = \frac{Q(a, b)}{T(a, b)} \frac{1}{\dfrac{F}{\varphi}(a, b) - u} \left[\frac{\dfrac{d\xi}{dt}}{(f'_\eta)'}\right]_\gamma.$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$f'_\eta = \psi(\xi, \eta),$$

on a

$$(f'_\eta)' = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dt}.$$

Le rapport $\dfrac{\frac{d\eta}{dt}}{\frac{d\xi}{dt}}$ a pour valeur, si l'on fait $t=\gamma$, le coefficient angulaire m_1 de la tangente à la branche γ de la courbe $f=0$ au point A. On a ainsi

$$(9)\qquad r_\gamma + r_\delta = \frac{Q(a,\,b)}{T(a,\,b)}\,\frac{1}{\frac{F}{\varphi}(a,\,b)-u}\left(\frac{1}{\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+m_1\frac{\partial\psi}{\partial\eta}}+\frac{1}{\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+m_2\frac{\partial\psi}{\partial\eta}}\right),$$

où, dans $\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$ et $\frac{\partial\psi}{\partial\eta}$, on remplace ξ et η par a et b.

Cela posé, si l'on désigne par Q_1 un polynôme quelconque en ξ et η, de degré $n-3$, et si l'on considère l'intégrale

$$J_1 = \int \frac{Q_1}{f'_y}(z\,dx - x\,dz),$$

on voit, comme plus haut, qu'elle est nulle le long du polygone R_0. Si l'on choisit pour Q_1 le premier membre de l'équation d'une courbe de degré $n-3$ présentant, en tous les points singuliers de la courbe $f=0$, le point A excepté, le caractère d'une courbe adjointe ([1]) (ce qui est toujours possible), les infinis de la fonction $\frac{Q_1}{f'_y}\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)$ seront les quantités γ et δ. La somme des résidus de cette fonction étant nulle, on trouve, comme plus haut,

$$0 = r'_\gamma + r'_\delta = \left(\frac{1}{\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+m_1\frac{\partial\psi}{\partial\eta}}+\frac{1}{\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+m_2\frac{\partial\psi}{\partial\eta}}\right)Q_1(a,\,b),$$

et par suite, d'après (9),

$$r_\gamma + r_\delta = 0.$$

Il n'y aurait d'exception à ce raisonnement, qui s'étend sans diffi-

([1]) C'est-à-dire ayant en tout point multiple d'ordre p (autre que A) de la courbe $f=0$ un point multiple d'ordre $p-1$, comme la courbe $f'_y=0$, et ne passant pas par A.

culté au cas des points multiples d'ordre supérieur à 2, que si, dans l'expression de $r_\gamma + r_\delta$, on ne pouvait pas mettre en facteur la quantité

$$\frac{Q(a, b)}{T(a, b)} \frac{1}{\frac{F}{\varphi}(a, b) - u},$$

c'est-à-dire si $T(a, b)$ était nul, cas où les infinis γ et δ ne seraient plus des infinis simples de $\Theta(t)$, ou si l'on avait à la fois

$$F(a, b) = \varphi(a, b) = 0,$$

parce qu'alors la fonction $\frac{F}{\varphi}(\xi, \eta)$ aurait deux valeurs différentes au point A, selon la branche de courbe que l'on considérerait.

Si l'on suppose donc que la courbe $T = 0$ ne passe par aucun des points singuliers de $f = 0$, et qu'aucun des points fixes du faisceau $F - u\varphi = 0$ ne coïncide avec l'un de ces points, on voit qu'on a la relation

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{i=mn} \int_{x_i^0}^{x_i} \frac{Q(x, y, z)}{f'_y T(x, y, z)}(z\,dx - x\,dz) = -\sum \int_{u_0}^{u} r_\beta\,du,$$

$\sum r_\beta$ désignant la somme des résidus, par rapport aux zéros de T, de la fonction de t,

$$\Theta(t) = \frac{Q}{f'_y T} \frac{(zx' - xz')}{\frac{F}{\varphi} - u}.$$

12. *Corollaire I.* — On en déduit, en s'appuyant sur les résultats obtenus plus haut, la proposition suivante :

Soit I *une intégrale abélienne de la forme*

$$I = \int \frac{Q(x, y, z)}{f'_y T(x, y, z)}(z\,dx - x\,dz),$$

relative à une courbe algébrique de degré n, $f = 0$.

La somme de mn *intégrales* I *dont les limites inférieures et supérieures sont respectivement les systèmes de valeurs de* x, y, z, *qui*

correspondent aux mn points d'intersection de la courbe $f = 0$ *avec deux courbes quelconques de degré m est nulle, si, parmi les courbes du faisceau déterminé par les courbes sécantes, il en est une qui coupe la courbe* $f = 0$ *aux points situés sur la courbe* $T = 0$, *et qui rendent l'intégrale infinie.*

Il faut toutefois : 1° que la courbe $T = 0$ ne passe par aucun des points singuliers de la courbe $f = 0$; 2° qu'aucun des points fixes du faisceau déterminé par les courbes sécantes ne coïncide avec un de ces points, ou avec l'un des points communs aux courbes $f = 0$, $T = 0$, et rendant l'intégrale infinie.

13. *Corollaire II.* — Supposons, $Q(x, y, z)$ étant toujours de degré q, que $T(x, y, z)$ soit un polynôme de degré $q - n + 3$, non divisible par z. Si la courbe $T = 0$ ne touche en aucun point la courbe $f = 0$, les zéros de $T(x, y, z)$ seront tous simples, et l'on aura, pour le résidu relatif à l'un de ces zéros, β,

$$r_\beta = \left[\frac{Qf'_\eta}{f'_\eta(T'_\xi f'_\eta - T'_\eta f'_\xi)\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}\right]_\beta = \left[\frac{Q}{(T'_\xi f'_\eta - T'_\eta f'_\xi)\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}\right]_\beta.$$

Par suite, en désignant par X, Y les coordonnées d'un point commun aux courbes $T = 0$, $f = 0$, il vient

$$(11)\quad \sum_{i=1}^{i=mn} \int_{\xi_i^0}^{\xi_i} \frac{Q(\xi, \eta)}{f'_\eta T(\xi, \eta)} d\xi = \sum \frac{Q(X, Y)}{T'_X f'_Y - T'_Y f'_X} \log \frac{F(X, Y) - u\varphi(X, Y)}{F(X, Y) - u_0 \varphi(X, Y)},$$

la somme s'étendant, dans le second membre, aux systèmes de valeurs de X, Y, qui vérifient simultanément les équations $f = 0$, $T = 0$.

On déduit de cette formule un théorème bien connu de Jacobi. Si l'on fait, en effet, $u = \infty$ dans la formule, il faut, pour que le second membre reste fini, qu'on ait l'identité

$$\sum \frac{Q(X, Y)}{T'_X f'_Y - T'_Y f'_X} = 0,$$

la somme étant étendue à tous les points communs aux courbes

$f(\xi, \eta) = 0$, $T(\xi, \eta) = 0$, de degrés respectifs n et h, et $Q(\xi, \eta)$ désignant un polynôme quelconque de degré $n + h - 3$, au plus, en ξ, η.

Il serait facile, d'après les considérations qui précèdent, de voir ce que devient le théorème de Jacobi quand le degré de Q surpasse $n + h - 3$; nous aurons occasion, dans un autre travail, de revenir sur ce sujet à un point de vue plus général.

14. *Corollaire III.* — Si T se réduit à une constante, $\sum r_\beta$ est nul, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Soit I *une intégrale abélienne de la forme*

$$I = \int \frac{Q(\xi, \eta)}{f'_\eta} d\xi,$$

relative à une courbe $f(\xi, \eta) = 0$, de degré n, Q *désignant un polynôme quelconque de degré $n - 3$.*

La somme de mn intégrales I *dont les limites inférieures et supérieures sont respectivement les systèmes de valeurs de ξ, η, qui correspondent aux points d'intersection de la courbe $f = 0$ avec deux courbes quelconques de degré m est nulle, si ces deux courbes ne passent simultanément par aucun des points singuliers de la courbe primitive.*

Dans le cas spécial où Q est une courbe adjointe à la courbe $f = 0$, la fonction

$$\Theta(t) = \frac{Q}{f'_\eta\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)} \frac{d\xi}{dt}$$

ne devient infinie que pour les zéros de $\frac{F}{\varphi} - u$, et la somme des mn intégrales I est nulle, *quelles que soient les courbes de même degré* $F = 0$, $\varphi = 0$.

C'est le théorème d'Abel pour les intégrales de première espèce.

On retrouverait de même, sans difficulté, les théorèmes connus pour les intégrales normales de troisième et de seconde espèce.

APPLICATION AUX FONCTIONS RATIONNELLES.

15. La marche qu'on a suivie pour établir la formule fondamentale s'applique également au *cas où la différentielle abélienne est la différentielle d'une fonction rationnelle de* ξ, η.

Soit $U = \frac{Q(\xi, \eta)}{R(\xi, \eta)}$ cette fonction, Q et R étant des polynômes de degrés q et r respectivement.

Considérons l'intégrale

$$J = \int \frac{dU}{dt} \frac{dt}{\frac{F}{\varphi} - u}.$$

Elle est nulle, d'après ce qui précède, le long du polygone R_0; par suite, les résidus, dans ce polygone, de la fonction

$$\Theta(t) = \frac{dU}{dt} \frac{1}{\frac{F}{\varphi} - u} = \frac{R\frac{dQ}{dt} - Q\frac{dR}{dt}}{R^2\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}$$

ont une somme nulle, et l'on en conclut, comme plus haut, la relation

$$\sum \frac{dU}{du} = -\sum r_\beta, \tag{12}$$

r_β étant le résidu de $\Theta(t)$ par rapport à un infini de cette fonction, autre qu'un zéro de $\frac{F}{\varphi} - u$.

Pour déterminer les infinis de cette nature de $\Theta(t)$, on doit distinguer deux cas, selon que q est inférieur ou supérieur à r.

Si l'on a $q \leqq r$, il est clair que la fonction $\frac{Q(\xi, \eta)}{R(\xi, \eta)} = \frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)} z^{r-q}$ ne devient pas infinie pour les zéros de $z(t)$, et il en est, par suite, de même de sa dérivée par rapport à t. En ce cas, les infinis correspondant aux résidus r_β sont les arguments des points communs aux courbes $f = 0$, $R = 0$. Si l'on a, au contraire, $q > r$, tout zéro de $z(t)$ est, en

général, un infini d'ordre $q-r$ pour la fonction $\frac{Q}{R}$, et d'ordre $q-r+1$ pour sa dérivée. Ces infinis sont à ajouter à ceux qui proviennent des zéros de $R(\xi, \eta)$.

Il est clair qu'on discutera à la fois les deux cas en supposant ξ et η remplacés dans $\frac{Q}{R}(\xi, \eta)$ par $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$; on obtient ainsi une fonction $\frac{Q(x,y,z)}{V(x,y,z)}$, où l'on peut supposer que le numérateur et le dénominateur sont deux polynômes de même degré, q, l'un ou l'autre pouvant être divisible par une puissance de z. Les infinis de $\Theta(t)$ correspondant aux résidus r_β sont alors les zéros de $V(x,y,z)$. Soit β un de ces zéros, supposé simple : c'est un infini double de $\Theta(t)$. Pour calculer le résidu correspondant, il suffit de remarquer que le résidu de $\frac{dU}{dt}$, relatif à ce zéro, est nul, puisque U est une fonction monodrome de t. On trouve ainsi, évidemment,

$$r_\beta = -\rho_\beta \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\frac{F}{\varphi}(t) - u}\right]_\beta,$$

ρ_β étant le résidu correspondant de $U = \frac{Q}{V}$. Or on a, ainsi qu'on l'a déjà trouvé plusieurs fois,

$$\rho_\beta = \frac{Q f'_Y}{V'_X f'_Y - V'_Y f'_X},$$

en désignant par X, Y, Z les coordonnées du point d'argument β, commun aux courbes $f = 0$, $V = 0$, et il vient enfin

$$r_\beta = \frac{Q f'_Y}{V'_X f'_Y - V'_Y f'_X} \frac{1}{\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)^2} \frac{\varphi(F'_X f'_Y - F'_Y f'_X) - F(\varphi'_X f'_Y - \varphi'_Y f'_X)}{\varphi^2 f'_Y}.$$

On peut écrire

$$\varphi(F'_X f'_Y - F'_Y f'_X) - F(\varphi'_X f'_Y - \varphi'_Y f'_X) = -\begin{vmatrix} f'_X & f'_Y & 0 \\ F'_X & F'_Y & F \\ \varphi'_X & \varphi'_Y & \varphi \end{vmatrix} = \frac{Z}{m}\begin{vmatrix} f'_X & f'_Y & f'_Z \\ F'_X & F'_Y & F'_Z \\ \varphi'_X & \varphi'_Y & \varphi'_Z \end{vmatrix},$$

en tenant compte de la relation $f(X, Y, Z) = 0$ et en désignant toujours par m le degré des courbes $F = 0$, $\varphi = 0$.

On déduit de là, en intégrant, par rapport à u, les deux membres de (12), le résultat suivant.

Soient $\sum\limits_{u} \frac{Q}{V}$ et $\sum\limits_{u_0} \frac{Q}{V}$ les sommes respectives des valeurs que prend la fonction $\frac{Q}{V}(x, y, z)$ aux points communs à la courbe $f = 0$ et aux courbes $F - u\varphi = 0$, $F - u_0\varphi = 0$; on a

$$(13)\quad \sum_{u} \frac{Q}{V} - \sum_{u_0} \frac{Q}{V} = \sum \frac{Z}{m} \frac{Q(X, Y, Z)\, J(X, Y, Z)}{V'_X f'_Y - V'_Y f'_X} \frac{u - u_0}{[F(X, Y, Z) - u\varphi(X, Y, Z)][F(X, Y, Z) - u_0\varphi(X, Y, Z)]},$$

où la somme, dans le second membre, s'étend aux points X, Y, Z, communs aux courbes $f = 0$, $V = 0$, supposées n'avoir aucun contact, et où J désigne le déterminant jacobien

$$J = \begin{vmatrix} f'_X & f'_Y & f'_Z \\ F'_X & F'_Y & F'_Z \\ \varphi'_X & \varphi'_Y & \varphi'_Z \end{vmatrix}.$$

Cette formule montre, ce que nous savions déjà par la théorie générale, en raison de la forme de $\Theta(t)$, que le second membre de (13) s'annule dans le cas où l'une des courbes, $\varphi = 0$, du faisceau $F - u\varphi$ touche la courbe $f = 0$ aux points où celle-ci est coupée par la courbe $V = 0$; elle met de plus en évidence une particularité spéciale aux intégrales abéliennes dans le cas où ces intégrales sont des fonctions rationnelles de x, y, z : c'est que le second membre de (13) est nul quand la jacobienne des courbes $F = 0$, $\varphi = 0$ et $f = 0$ passe par les points communs à cette dernière et à la courbe $V = 0$, c'est-à-dire, puisque les points communs à la jacobienne et à f sont les points de contact avec cette dernière courbe des courbes du faisceau $F - u\varphi$ qui la touchent, lorsque les courbes du faisceau qui passent respectivement par les points d'intersection des courbes $V = 0$, $f = 0$ touchent en ces points cette dernière courbe.

On voit que ce résultat comprend, comme cas particulier, le cas rap-

pelé plus haut, où l'*une* des courbes du faisceau touche f en *tous* les points communs aux courbes $f = 0$, $V = 0$.

On peut étendre ce théorème au cas où la courbe $V = 0$ touche en certains points à la courbe $f = 0$: nous allons démontrer, en effet, la proposition suivante :

La somme des valeurs que prend une fonction rationnelle $\frac{Q}{V}(x, y, z)$ *homogène et de degré zéro, aux points communs à une courbe algébrique* $f = 0$, *et à chacune des courbes d'un faisceau reste constante, si les courbes du faisceau qui passent respectivement par les points d'intersection des courbes* $f = 0$, $V = 0$ *rendant la fonction* $\frac{Q}{V}$ *infinie, ont, en chacun de ces points avec la courbe* $f = 0$, *un contact d'un ordre au moins égal à la différence entre les ordres des contacts de la courbe* $f = 0$ *avec les courbes* $V = 0$ *et* $Q = 0$ *au point considéré* (¹).

On suppose toujours qu'aucun des points fixes du faisceau ne coïncide avec un des points communs aux courbes $f = 0$, $V = 0$, et rendant infinie la fonction $\frac{Q}{V}$.

Soit β l'argument d'un point où les courbes $V = 0$, $Q = 0$ ont respectivement avec $f = 0$ des contacts d'ordre $\mu - 1$ et $\nu - 1$; soit $F - u_1\varphi = 0$ l'équation d'une courbe du faisceau, ayant en ce point un contact d'ordre $\mu - \nu$ avec la courbe $f = 0$.

Posons $t - \beta = \tau$.

On a

$$H(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{V}\right)\frac{1}{\frac{F}{\varphi} - u}.$$

Par hypothèse, on a, aux environs du point $t = \beta$,

$$V(t) = a\tau^{\mu} + b\tau^{\mu+1} + \ldots,$$

$$Q(t) = a'\tau^{\nu} + b'\tau^{\nu+1} + \ldots.$$

(¹) Si la courbe $Q = 0$ ne passe pas par le point considéré, on devra, pour appliquer le théorème, regarder l'ordre de son contact avec $f = 0$ en ce point comme égal à -1. Il faudra alors que la courbe du faisceau qui passe par ce point y ait avec $f = 0$ un contact plus élevé que la courbe $V = 0$.

d'où

$$\frac{Q}{V} = \frac{g}{\tau^{\mu-\nu}} + \frac{h}{\tau^{\mu-\nu-1}} + \dots + \frac{r}{\tau} + s + \dots;$$

on a également

$$F(t) - u_0 \varphi(t) = l\tau^{\mu-\nu+1} + m\tau^{\mu-\nu+2} + \dots,$$

et le résidu correspondant de $\Theta(t)$ sera le coefficient de $\frac{1}{\tau}$ dans l'expression

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{g}{\tau^{\mu-\nu}} + \frac{h}{\tau^{\mu-\nu-1}} + \dots + \frac{r}{\tau} + s + \dots\right) \times \frac{1}{u_0 - u + \dfrac{l\tau^{\mu-\nu+1} - m\tau^{\mu-\nu+2} + \dots}{\varphi(t)}}.$$

Or, $\varphi(t)$ n'est pas nul pour $t = \beta$, puisqu'une seule courbe du faisceau passe par le point β, et qu'on a supposé que cette courbe était $F - u_0\varphi = 0$.

Le deuxième facteur de l'expression précédente, ordonné suivant les puissances croissantes de τ, est donc de la forme

$$\frac{1}{u_0 - u} + k\tau^{\mu-\nu+1} + j\tau^{\mu-\nu+2} + \dots,$$

et comme le premier ne renferme ni terme en $\frac{1}{\tau}$ ni terme en $\frac{1}{\tau^{\mu-\nu+2}}$, le résidu est nul. C. Q. F. D.

16. On peut donner une formule analogue pour exprimer le produit des valeurs que prend la fonction $\frac{Q}{V}$ aux points communs à la courbe $f = 0$ et à la courbe $F - u\varphi = 0$.

Soient $\prod\limits_u \frac{Q}{V}$ ce produit, et $\prod\limits_{u_0} \frac{Q}{V}$ le produit analogue pour les courbes $f = 0$, $F - u_0\varphi = 0$. On part, pour l'évaluer, de l'intégrale

$$J = \int \frac{1}{U} \frac{dU}{dt} \frac{dt}{\dfrac{F}{\varphi} - u};$$

en posant toujours $U = \frac{Q}{V}$, on trouve de même

$$\sum \frac{1}{U}\frac{dU}{du} = -\sum r_\beta, \tag{14}$$

r_β désignant le résidu de la fonction

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dt}\frac{1}{\frac{F}{\varphi}-u} = \frac{V}{Q}\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{V}\right)\frac{1}{\frac{F}{\varphi}-u}$$

par rapport à un infini de cette fonction autre qu'un zéro de $\frac{F}{\varphi} - u$, c'est-à-dire par rapport à un zéro de $Q(x, y, z)$ ou de $V(x, y, z)$.

S'il s'agit d'un zéro de V, d'ordre de multiplicité μ, on a évidemment

$$r_\beta = \mu\left[\frac{V\frac{dQ}{dt} - Q\frac{dV}{dt}}{Q\frac{dV}{dt}\left(\frac{F}{\varphi}-u\right)}\right]_\beta = -\mu\left(\frac{1}{\frac{F}{\varphi}-u}\right)_\beta,$$

et s'il s'agit d'un zéro de Q, d'ordre de multiplicité ν,

$$r_\beta = \nu\left[\frac{V\frac{dQ}{dt} - Q\frac{dV}{dt}}{V\frac{dQ}{dt}\left(\frac{F}{\varphi}-u\right)}\right]_\beta = \nu\left(\frac{1}{\frac{F}{\varphi}-u}\right)_\beta.$$

Si maintenant on intègre les deux membres de la relation (14) par rapport à u, on a

$$\sum \log\frac{Q}{V} = \sum_Q \nu\log\left(\frac{F}{\varphi}-u\right) - \sum_V \mu\log\left(\frac{F}{\varphi}-u\right),$$

d'où

$$\prod_u \frac{Q}{V} = \prod_{u_0}\left(\frac{Q}{V}\right)\prod_Q\left[\frac{F(X,Y,Z) - u\,\varphi(X,Y,Z)}{F(X,Y,Z) - u_0\,\varphi(X,Y,Z)}\right]^\nu \prod_V\left[\frac{F(X,Y,Z) - u_0\,\varphi(X,Y,Z)}{F(X,Y,Z) - u\,\varphi(X,Y,Z)}\right]^\mu. \tag{15}$$

Dans le second membre, le produit $\prod_Q$ est étendu aux points X, Y, Z

communs aux courbes $f=0$, $Q=0$; et le produit $\prod_V$ aux points X, Y, Z communs aux courbes $f=0$, $V=0$.

On en déduit, comme plus haut, les conséquences suivantes :

Le produit des valeurs que prend une fonction rationnelle $\frac{Q}{V}(x, y, z)$ de degré zéro aux points communs à une courbe $f=0$ et à chacune des courbes d'un faisceau $F-u\varphi=0$ est constant, quand une des courbes du faisceau passe par les points d'intersection de la courbe $f=0$ avec les courbes $Q=0$, $V=0$, rendant la fonction $\frac{Q}{V}$ nulle ou infinie (¹). *Ce produit est constant, en particulier, si l'une des courbes du faisceau comprend la courbe $QV=0$, c'est-à-dire si toutes les courbes du faisceau rencontrent aux mêmes points les courbes $Q=0$, $V=0$.*

17. Le théorème démontré au nº **15** est susceptible d'une conséquence intéressante, dont nous ferons quelques applications, et que, pour cette raison, nous placerons à la suite de la théorie générale.

Supposons que les points de la courbe $f=0$, où la fonction rationnelle $\frac{Q}{V}(x, y, z)$ de degré zéro devient infinie, soient tous des points d'inflexion de f, et que la fonction $\frac{Q}{V}$ soit infinie du premier ordre en chacun de ces points.

Prenons pour faisceau sécant le faisceau des courbes qui coupent respectivement $f=0$ aux points de contact des tangentes communes à cette courbe et à chacune des courbes d'un faisceau *tangentiel* donné.

Je dis que la somme des valeurs de la fonction $\frac{Q}{V}$ aux points communs à $f=0$ et à chacune des courbes du faisceau ponctuel considéré demeure constante.

Il suffit, pour cela, de montrer que la courbe du faisceau ponctuel qui passe par un des points d'inflexion donnés sur la courbe $f=0$ touche

(¹) Il suffit que la courbe du faisceau considérée *passe* par les points désignés, quel que soit le nombre des intersections de la courbe $f=0$ avec les courbes $Q=0$, $V=0$, confondues en chacun de ces points.

cette courbe en ce point, ce qui est évident, puisque la tangente d'inflexion correspondante doit être comptée deux fois parmi les tangentes communes à la courbe $f = 0$ et à la courbe du faisceau tangentiel qui touche cette droite. Donc :

Soit $\frac{Q}{V}(x, y, z)$ une fonction rationnelle quelconque, de degré zéro, ne devenant infinie, sur une courbe algébrique $f(x, y, z) = 0$, qu'en des points d'inflexion de cette courbe, et étant infinie du premier ordre seulement en ces points ([1]).

La somme des valeurs que prend cette fonction aux points de contact de la courbe $f = 0$ et des tangentes communes à cette courbe et à une autre courbe algébrique de classe donnée reste fixe quand cette dernière varie d'une manière quelconque, mais sans toucher CONSTAMMENT *une des tangentes menée à la courbe primitive en un des points d'inflexion considérés.*

([1]) Le sens de cette expression est le suivant : Si $V = 0$ a un contact d'ordre $\mu - 1$ avec $f = 0$ au point considéré, il faut que $Q = 0$ ait avec cette dernière courbe, au même point, un contact d'ordre $\mu - 2$.

DEUXIÈME PARTIE.

En appliquant à des différentielles algébriques ou à des fonctions rationnelles des coordonnées ayant, par rapport à la courbe $f=0$, une signification géométrique, les formules et les théorèmes démontrés dans la première Partie de ce travail, on obtient des propositions géométriques nombreuses, dont quelques-unes méritent d'être mises en évidence.

Nous les classerons en propositions relatives aux aires, aux directions et aux longueurs. Celles qui concernent spécialement les arcs de courbe, dans le cas où ces arcs s'expriment par une intégrale abélienne, feront l'objet de la troisième Partie de notre travail.

PROPOSITIONS RELATIVES AUX AIRES.

18. L'aire élémentaire comprise entre les deux points ξ, η; $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$ de la courbe $f=0$ et les rayons vecteurs qui joignent ces points à l'origine des coordonnées a pour expression

$$da = -\eta\, d\xi + \xi\, d\eta = \frac{1}{z^3}\left[-y(z\,dx - x\,dz) + x(z\,dy - y\,dz)\right];$$

or on a

$$\begin{aligned} x f'_x + \ y f'_y + \ z f'_z &= nf = 0, \\ dx\, f'_x + dy\, f'_y + dz\, f'_z &= 0; \end{aligned}$$

on en conclut

$$da = \frac{1}{z^2}\frac{f'_z}{f'_y}(z\,dx - x\,dz).$$

La fonction $\Theta(t)$ est ici

$$\Theta(t) = \frac{f'_z}{z^2 f'_y}\,\frac{(zx' - xz')}{\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}.$$

Elle ne devient infinie que pour les valeurs de t qui annulent z^2 : si φ est de la forme $z^2\varphi_1$ et si F ne s'annule pour aucune de ces valeurs, $\Theta(t)$ reste fini pour les mêmes valeurs, et les résidus r_β correspondants sont nuls. Donc :

Soit une courbe algébrique quelconque f; menons les rayons vecteurs qui joignent un point arbitraire du plan aux points communs à f et à une courbe algébrique quelconque F *n'ayant avec la première aucune direction asymptotique commune : la somme des aires décrites par ces rayons vecteurs est nulle si la courbe* F *se déplace en restant asymptote à elle-même* ([1]).

19. On peut donner sur les aires un théorème beaucoup plus général, et qui fournit une interprétation curieuse d'une des propositions algébriques exposées plus haut (**14**).

Proposons-nous de chercher l'aire élémentaire comprise entre les courbes $f=0$, $F-u\varphi=0$, $f+\varepsilon\psi=0$, $F-(u+du)\varphi=0$, au voisinage du point ξ, η, commun aux courbes $F-u\varphi=0$, $f=0$.

Dans ces équations, ε désigne une quantité infiniment petite, indépendante de u.

Soient $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$ les coordonnées du point voisin de ξ, η situé sur les courbes $f=0$, $F-(u+du)\varphi=0$, $\xi+\delta\xi$, $\eta+\delta\eta$, celles du point voisin situé sur les courbes $F-u\varphi=0$, $f+\varepsilon\psi=0$. On a, pour l'aire cherchée, à un facteur constant près,

$$da = d\xi\,\delta\eta - d\eta\,\delta\xi;$$

or

$$\begin{aligned}
\delta\xi[F'_\xi - u\varphi'_\xi] + \delta\eta[F'_\eta - u\varphi'_\eta] &= 0,\\
\delta\xi\, f'_\xi + \delta\eta\, f'_\eta + \varepsilon\psi &= 0.
\end{aligned}$$

On en conclut

$$da = \frac{\varepsilon\psi[(F'_\xi - u\varphi'_\xi)\,d\xi + (F'_\eta - u\varphi'_\eta)\,d\eta]}{f'_\xi[F'_\eta - u\varphi'_\eta] - f'_\eta[F'_\xi - u\varphi'_\xi]},$$

([1]) Plus généralement cette somme reste nulle si l'on prend successivement pour F toutes les courbes d'un faisceau comprenant une courbe qui admet pour asymptotes toutes les asymptotes de f.

et, en tenant compte de la relation

$$o = d\xi f'_\xi + d\eta f'_\eta,$$

il vient

$$da = \varepsilon \frac{\psi\, d\xi}{f'_y},$$

Supposons que ψ soit de degré $n - q$, n désignant toujours le degré de $f = o$; on aura, en revenant aux coordonnées homogènes,

$$da = \varepsilon \frac{\psi}{z^{3-q} f'_y}(z\, dx - x\, dz)$$

et

$$\Theta(t) = \varepsilon \frac{\psi(zx' - xz')}{z^{3-q} f'_y \left[\frac{F}{\varphi} - u\right]}.$$

On n'a à s'occuper, pour le calcul des résidus r_β, que des zéros de z^{3-q}; ces zéros ne sont pas des infinis de $\Theta(t)$, si l'on a

$$\varphi = z^{3-q} \varphi_1,$$

et les quantités r_β sont nulles. On en conclut, en donnant successivement à q les valeurs 1 et 3, les propositions suivantes :

La somme des aires comprises entre deux courbes asymptotes et deux courbes asymptotiques (¹) *quelconques est nulle.*

La somme des aires comprises entre deux courbes quelconques, de même degré, et deux courbes osculatrices entre elles en tous leurs points à l'infini est nulle.

On doit admettre toutefois que les deux groupes de courbes n'ont aucune direction asymptotique commune.

20. Plus généralement, ainsi que cela résulte du théorème du n° **12** :

La somme des aires comprises entre deux courbes asymptotes et

(¹) Nous disons que deux courbes sont asymptotes, si elles ont mêmes asymptotes; asymptotiques, si elles ont mêmes directions asymptotiques.

deux courbes quelconques de même degré est nulle si, parmi les courbes du faisceau déterminé par ces dernières, il en est une qui admette pour directions asymptotiques toutes les directions asymptotiques des deux premières.

La somme des aires comprises entre deux courbes asymptotiques et deux courbes quelconques de même degré est nulle, si, parmi les courbes du faisceau déterminé par ces dernières, il en est une qui admette pour asymptotes toutes les asymptotes de l'une des premières.

La somme des aires comprises entre deux courbes de même degré et deux courbes quelconques, également de même degré, est nulle, si, parmi les courbes du faisceau déterminé par ces dernières, il en est une qui oscule l'une des premières en tous ses points à l'infini.

En particulier :

La somme des aires illimitées comprises entre deux courbes osculatrices entre elles en tous leurs points à l'infini est nulle.

PROPOSITIONS RELATIVES AUX DIRECTIONS.

21. Soit θ l'angle que fait avec $O\xi$ la droite qui joint l'origine à un point ξ, η du plan ; on a

$$\tang\theta = \frac{\eta}{\xi}$$

et

$$d\theta = \frac{\xi\, d\eta - \eta\, d\xi}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Si le point ξ, η appartient à la courbe $f(\xi, \eta) = 0$, il vient

$$d\theta = -\frac{\xi f'_\xi + \eta f'_\eta}{f'_\eta(\xi^2 + \eta^2)}\, d\xi$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$d\theta = \frac{f'_z}{f'_y(x^2 + y^2)}\,(x\, dz - z\, dx).$$

L'angle θ est donc donné par une intégrale abélienne, et les théorèmes de la première Partie permettent de calculer la somme des angles que font avec Ox les rayons vecteurs des points communs à la courbe $f = 0$ et à une courbe algébrique quelconque $F - u\varphi_1 = 0$, ou plutôt la variation qu'éprouve cette somme quand on passe de la courbe sécante $F - u_0\varphi_1 = 0$ à la courbe $F - u\varphi_1 = 0$.

Pour simplifier le langage, nous adopterons une définition due à Laguerre.

Soient dans un plan deux systèmes de n droites A et B; prenons arbitrairement un axe fixe H, dans ce plan : si la somme des angles que font avec l'axe fixe les droites du système A est égale, à un multiple de π près, à la somme des angles que font avec ce même axe les droites du système B, on dira que les deux systèmes A et B ont même *orientation*. Ils jouiront évidemment de la même propriété relativement à tout axe situé dans le plan ([1]).

22. De la forme de la différentielle $d\theta$ et des théorèmes généraux de la première Partie résultent par suite les propositions suivantes :

Les deux systèmes, formés par les droites qui joignent respectivement un point fixe aux points où deux courbes algébriques de même degré sont traversées par une courbe algébrique, ont même orientation, si, parmi les courbes du faisceau déterminé par les deux premières, il en est une qui passe par tous les points où la dernière rencontre le cercle de rayon nul ayant le point fixe pour centre.

En particulier :

Les deux systèmes ont même orientation, quelle que soit la dernière courbe, si les deux premières rencontrent le cercle de rayon nul aux mêmes points.

([1]) Laguerre, *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes* (*Bulletin de la Société philomathique*, p. 15; 1867).

23. Comme application de ces propositions générales, on peut énoncer, par exemple, les théorèmes suivants :

L'orientation du système des droites qui joignent un point fixe aux points d'intersection d'une courbe algébrique quelconque et d'un cercle ayant ce point pour centre est indépendante du rayon du cercle.

L'orientation du système des droites qui joignent un point fixe a aux points d'intersection d'une courbe algébrique et d'un cercle quelconques est la même que celle du système formé : 1° par les droites qui vont de a aux points d'intersection de la courbe et de l'axe radical du cercle et du point a; 2° par les directions asymptotiques de la courbe.

Ce théorème prend en particulier une forme très simple si l'on suppose que le point a est situé sur le cercle; l'axe radical du cercle et du point devient alors la tangente au cercle en a.

Si l'on coupe par une courbe algébrique un faisceau de coniques ayant une directrice et un foyer communs, les systèmes formés par les droites qui joignent le foyer aux points d'intersection de la courbe et de chacune des coniques ont même orientation : cette orientation est celle du système formé par les droites qui joignent le foyer aux points d'intersection de la courbe et de la directrice et par les droites opposées.

Ce théorème est une généralisation d'une proposition connue sur les coniques, et qu'on retrouve en supposant que la courbe sécante soit une droite.

24. On peut obtenir des propositions analogues, et plus élégantes, en considérant, au lieu des coordonnées ordinaires, des coordonnées tangentielles.

Soit $f(\mathrm{U}, \mathrm{V}) = 0$, ou, en coordonnées homogènes, $f(u, v, w) = 0$ l'équation tangentielle d'une courbe, l'angle que fait avec $\mathrm{O}\xi$ la tangente $\mathrm{U}\xi + \mathrm{V}\eta + 1 = 0$ est défini par la relation

$$\operatorname{tang}\theta = -\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}},$$

d'où

$$d\theta = \frac{V\,dU - U\,dV}{U^2 + V^2} = \frac{V f'_V + U f'_U}{U^2 + V^2}\,\frac{dU}{f'_V}$$

et, en coordonnées homogènes,

$$d\theta = \frac{f'_w}{(u^2 + v^2) f'_v}\,(w\,du - u\,dw).$$

On conclut de cette expression que l'orientation des tangentes communes à la courbe $f = 0$ et à deux courbes algébriques est la même si, parmi les courbes du faisceau tangentiel déterminé par ces dernières, il en est une qui touche les droites menées tangentiellement à la courbe $f = 0$ par les points $u + vi = 0$, $u - vi = 0$, c'est-à-dire par les points cycliques du plan. En d'autres termes :

Les deux systèmes de tangentes respectivement communes à deux courbes algébriques de même classe et à une courbe algébrique quelconque ont même orientation, si, parmi les courbes du faisceau tangentiel déterminé par les deux premières, il en est une qui admette pour foyers tous les foyers de la dernière.

En particulier :

Les deux systèmes de tangentes respectivement communes à deux courbes homofocales et à une courbe algébrique quelconque ont même orientation (¹). (LAGUERRE.)

25. Ces propositions donnent lieu à de nombreuses conséquences; de la dernière on déduit en particulier les théorèmes suivants :

Si d'un point M *situé dans le plan d'une courbe de classe n on mène les n tangentes à la courbe, et si l'on joint le point* M *aux n foyers réels de la courbe, les deux systèmes de droites ainsi obtenus ont même orientation* (²).

(¹) Ce dernier théorème a été donné sans démonstration sous une autre forme par Laguerre (*Société philomathique*, p. 140; 1870).

(²) Ce théorème a été donné par Laguerre sans démonstration dans les *Comptes rendus* (janvier 1865).

Soient deux courbes de classes m et n, A *et* B : *le système des mn tangentes communes a même orientation que le système des mn droites qui joignent les m foyers réels de* A *aux n foyers réels de* B (¹).

La première des propositions du nº **24** fournit également des conséquences intéressantes :

Soit un faisceau tangentiel de courbes algébriques de classe n; par un foyer f de l'une d'entre elles, menons les n tangentes à l'une quelconque des autres : tous les systèmes ainsi obtenus à partir du point f ont même orientation.

On en conclut que :

Si l'on joint le point f aux n foyers réels d'une quelconque des courbes du faisceau tangentiel considéré et aux n foyers réels d'une autre de ces courbes, également quelconque, les deux systèmes ont même orientation.

En d'autres termes :

Le lieu des foyers des courbes d'un faisceau tangentiel, déterminé par deux courbes A *et* B *de classe n, est une courbe telle que, si l'on joint un de ses points aux n foyers réels de* A *et aux n foyers réels de* B, *les deux systèmes ainsi obtenus aient même orientation. Ce lieu ne dépend donc pas de tous les paramètres qui définissent les courbes* A *et* B; *il ne dépend que de la position des foyers de ces courbes.*

26. En appliquant ces résultats aux coniques, on obtient les propositions suivantes, dont quelques-unes sont aisées à démontrer directement.

Soient deux coniques A *et* B, *ayant respectivement pour foyers*

(¹) Ce théorème a été donné par Laguerre sans démonstration dans le *Bulletin de la Société philomathique*, p. 140; 1870.

réels les points a_1 et a_2, b_1 et b_2; soit C une conique quelconque inscrite dans le quadrilatère circonscrit à A et B : les deux faisceaux de droites qui joignent un foyer de C aux points a_1 et a_2, b_1 et b_2 ont mêmes bissectrices.

Le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère circonscrit à deux coniques reste le même si ces deux coniques varient, leurs foyers respectifs demeurant fixes : la proposition précédente définit ce lieu.

Soient deux systèmes de coniques respectivement homofocales : les points d'intersection des tangentes communes à une courbe quelconque du premier système, et à une courbe quelconque du second, restent sur une courbe qui coïncide avec le lieu précédent.

Car ce lieu est celui des points tels que les droites ma_1 et ma_2 aient les mêmes bissectrices que les droites mb_1 et mb_2 : on forme sans difficulté son équation, en s'appuyant sur cette propriété, et l'on trouve une courbe du troisième degré.

PROPOSITIONS RELATIVES AUX LONGUEURS.

27. Nous commencerons par des théorèmes relatifs aux centres des moyennes distances d'un système de points, et dont quelques-uns ont été donnés par Liouville.

Soit $f(\xi, \eta) = 0$ une courbe algébrique de degré n; appliquons les théorèmes généraux de la première Partie à l'intégrale

$$\xi = \int d\xi.$$

On a, en coordonnées homogènes,

$$d\xi = \frac{z\,dx - x\,dz}{z^2}.$$

La fonction $\Theta(t)$ est ici

$$\Theta(t) = \frac{zx' - xz'}{z^2\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}.$$

On en conclut que la somme des abscisses des points communs à la courbe $f=0$ et à l'une quelconque des courbes du faisceau $F-u\varphi=0$ est constante, si, parmi ces courbes, il en est une qui admette pour asymptotes les asymptotes de f; et, en particulier, si toutes les courbes du faisceau sont asymptotes entre elles.

Les mêmes théorèmes s'appliquent à la somme des ordonnées.

Si les courbes du faisceau $F-u\varphi$ ont mêmes directions asymptotiques, c'est-à-dire si $\varphi=z\varphi_1$, on a

$$\Theta(t)=\frac{zx'-xz'}{z\left[\frac{F}{\varphi_1}-uz\right]}.$$

Les infinis de $\Theta(t)$, correspondant aux zéros de z sont alors simples, et l'on a, pour le résidu relatif à l'un de ces zéros, β,

$$r_\beta=\frac{-x_\beta}{\left(\frac{F}{\varphi_1}\right)_\beta}$$

quantité indépendante de u.

Par conséquent on aura

$$\sum\frac{d\xi}{du}=-\sum r_\beta=A:$$

A est une constante, et

$$\sum\xi=Au+B.$$

On aurait de même

$$\sum\eta=A'u+B'.$$

28. De tout ce qui précède, on déduit les propositions suivantes :

Le centre des moyennes distances des points communs à deux courbes algébriques quelconques reste fixe si l'une de ces courbes varie en restant asymptote à elle-même (1). (LIOUVILLE.)

Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe algébrique quelconque et aux courbes d'un faisceau reste

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, p. 371; 1841.

fixe, si, parmi les courbes de ce faisceau, il en est une qui admette pour asymptotes toutes les asymptotes de la première courbe. (*Exemple :* la courbe fixe est une droite, asymptote à l'une des courbes du faisceau.)

Le centre des moyennes distances des points, communs à une courbe algébrique quelconque et à chacune des courbes d'un faisceau, décrit une droite, si les courbes du faisceau ont mêmes directions asymptotiques, ou si l'une d'elles admet pour directions asymptotiques toutes les directions asymptotiques de la première courbe.

Exemple. — *Le centre des moyennes distances des pieds des normales abaissées d'un point sur une courbe algébrique ne passant pas par les points cycliques du plan décrit une droite, quand le point considéré se meut lui-même sur une droite.*

Dans tous ces énoncés, on suppose que la courbe considérée et le faisceau des courbes sécantes n'ont aucune direction asymptotique commune; il est d'ailleurs inutile d'introduire explicitement cette restriction, puisque, si l'on se trouve placé dans le cas singulier dont il s'agit, un des points de rencontre de la courbe fixe et des courbes du faisceau est toujours à l'infini, et qu'il n'y a dès lors plus lieu de considérer le centre des moyennes distances de ces points.

29. Nous n'avons appliqué jusqu'ici à l'intégrale $\int d\xi$ que les propositions générales sur les intégrales abéliennes; nous pouvons aller plus loin, puisque cette intégrale est une fonction rationnelle de ξ, η; et la proposition du n° **15** nous donnera la conséquence suivante, plus générale que celles qui précèdent.

Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe algébrique quelconque et aux courbes d'un faisceau reste fixe, si chaque asymptote de la courbe est asymptote à l'une des courbes du faisceau.

On peut déduire de là des théorèmes intéressants, en faisant varier

le degré et la nature du faisceau sécant, tout en satisfaisant toujours à la condition indiquée; ainsi :

Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes menées à une courbe algébrique parallèlement à une même direction reste fixe quand cette direction varie. (CHASLES.)

30. Si toutes les asymptotes d'une courbe sont d'inflexion (la courbe n'étant pas tangente à la droite de l'infini), la fonction ξ ou $\frac{x}{z}$ ne devient infinie qu'en des points d'inflexion de cette courbe et, par suite, d'après (**17**).

Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes menées par un point quelconque du plan à une courbe algébrique ayant toutes ses asymptotes d'inflexion est un point fixe.

Ce point est également le centre des moyennes distances des points de contact avec la courbe considérée des tangentes communes à cette courbe et à une courbe algébrique quelconque.

En transformant ces propositions par la méthode de réciprocité, on arrive aux résultats suivants :

Soit une courbe telle que toutes les tangentes qu'on peut lui mener par un point soient des tangentes de rebroussement : la polaire de ce point par rapport aux tangentes menées à la courbe en ses points de rencontre avec une droite quelconque est une droite fixe.

Cette droite est également la polaire du point considéré par rapport aux tangentes menées à la courbe en ses points de rencontre avec une courbe algébrique quelconque.

Ces propositions s'appliquent, par exemple, à l'hypocycloïde à trois rebroussements, aux développées de coniques, etc.

31. Si, au lieu de l'intégrale $\int d\xi$, on considère $\int \frac{d\xi}{\xi}$, on est amené

à la recherche du produit des abscisses qui correspondent aux points d'intersection des courbes $f = 0$, $F - u\varphi = 0$.

On a

$$\int \frac{d\xi}{\xi} = \int \frac{x'z - xz'}{xz}\, dt,$$

et l'on peut par suite énoncer le théorème suivant :

Le produit des distances à une droite fixe D *des points communs à une courbe algébrique f, et à chacune des courbes d'un faisceau, est constant, si, parmi les courbes du faisceau, il en est une qui admette pour directions asymptotiques toutes les directions asymptotiques de f, et qui passe par les points où cette dernière courbe rencontre la droite* D.

En particulier :

Ce produit est constant si toutes les courbes du faisceau ont mêmes directions asymptotiques et coupent aux mêmes points la droite D.

Exemple. — Si l'on coupe une courbe algébrique par une série de cercles ayant deux points communs, A et B, le produit des distances à la droite AB des points d'intersection de la courbe et d'un des cercles est constant.

32. En partant de l'intégrale

$$\frac{1}{\xi} = -\int \frac{d\xi}{\xi^2} = -\frac{x'z - xz'}{x^2}\, dt,$$

on arrive à des résultats semblables à ceux des nos **28**, **29** et **30**. Ainsi, par exemple :

La somme des inverses des distances à une droite D *des points communs à une courbe algébrique et à chacune des courbes d'un faisceau reste constante si l'une des courbes du faisceau passe par les points d'intersection de la courbe primitive avec la droite* D *et y a les mêmes tangentes que cette courbe.*

Si tous les points où une droite D *rencontre une courbe algébrique*

sont des points d'inflexion, la somme des inverses des distances à cette droite des points de contact de la courbe avec les tangentes issues d'un point quelconque est constante.

Ce théorème s'applique, par exemple, aux courbes du troisième ordre.

33. L'emploi des coordonnées tangentielles conduit également, sur les longueurs, à des propriétés intéressantes, dans l'énoncé desquelles figurent des systèmes de courbes homofocales, comme dans le cas des propositions sur les directions.

La distance de l'origine à la droite $U\xi + V\eta + 1 = 0$ est donnée par la formule

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{U^2 + V^2}},$$

d'où

$$-\frac{d\delta}{\delta} = \frac{U\,dU + V\,dV}{U^2 + V^2};$$

et, en coordonnées homogènes, en supposant qu'on ait pour équation de la courbe

$$f(u, v, w) = 0,$$

il vient

$$-\frac{d\delta}{\delta} = \frac{uf'_v - vf'_u}{f'_v(u^2 + v^2)w}(w\,du - u\,dw).$$

Il résulte de cette expression que le produit des distances de l'origine aux tangentes communes aux courbes

$$f = 0, \qquad F - \lambda(u^2 + v^2)w\varphi = 0$$

reste constant quand on fait varier le paramètre λ, et l'on exprimerait sans difficulté cette proposition sous une forme purement géométrique, d'ailleurs un peu compliquée.

Nous nous bornerons à examiner quelques cas particuliers.

34. Supposons d'abord que la courbe $f = 0$ soit une conique, ayant l'origine pour foyer. On aura

$$f(u, v, w) = u^2 + v^2 + w(au + bv + cw),$$

d'où

$$-\frac{d\delta}{\delta}=\frac{bu-av}{f'_v(u^2+v^2)}(w\,du-u\,dw).$$

Le dénominateur ne contient plus le facteur w; on peut donc énoncer les théorèmes suivants :

Le produit des distances du foyer d'une conique aux tangentes, communes à cette conique et à chacune des courbes d'un faisceau tangentiel, est constant, si, parmi les courbes du faisceau, il en est une qui admette pour foyers les foyers de la conique.

Le produit des distances du foyer d'une conique aux tangentes communes à cette conique et à chacune des courbes d'un système homofocal, quelconque d'ailleurs, est constant.

En d'autres termes :

Le produit des distances du foyer d'une conique aux $2n$ tangentes communes à cette conique et à une courbe algébrique de classe n est égal au produit des distances du même point aux $2n$ tangentes qu'on peut mener à la conique par les n foyers réels de la courbe.

55. Supposons, en second lieu, la courbe $f=0$ étant quelconque, que l'on considère les tangentes communes à cette courbe et à des coniques homofocales, ayant l'origine pour foyer. L'équation générale de ces coniques sera

$$w(au+bv+cw)-\lambda(u^2+v^2)=0,$$

λ étant un paramètre variable, et la fonction $\Theta(t)$ correspondante sera

$$\Theta(t)=\frac{uf'_v-vf'_u}{f'_v w(u^2+v^2)}\,\frac{wu'-uw'}{\dfrac{w(au+bv+cw)}{u^2+v^2}-\lambda}.$$

Les zéros du dénominateur qui sont des infinis de $\Theta(t)$ sont ceux de w; le résidu correspondant à l'un d'eux β est

$$r_\beta=\left[\frac{uf'_v-vf'_u}{f'_v w'(u^2+v^2)}\,\frac{uw'}{\lambda}\right]_\beta.$$

Or on a, pour $t = \beta$, puisque w est nul,

$$uf'_u + vf'_v = 0,$$

ce qui donne enfin

$$r_\beta = \frac{1}{\lambda};$$

d'où, en vertu de la formule fondamentale,

$$-\sum\int\frac{d\delta}{\delta} = -n\log\lambda.$$

n étant le nombre des zéros β, c'est-à-dire la classe de la courbe $f = 0$. Effectuant l'intégrale dans le premier membre, on trouve, en appelant δ_1, δ_2, ... les distances de l'origine aux tangentes communes à $f = 0$ et à la courbe $w(au + bv + cw) - \lambda(u^2 + v^2) = 0$

$$\delta_1\delta_2\ldots = A\lambda^n,$$

A étant une constante indépendante de λ. Or, si l'on désigne par B le demi petit axe de la conique $w(au + bv + cw) - \lambda(u^2 + v^2) = 0$, on a

$$\lambda = B^2 c;$$

d'où cette proposition :

Soient une courbe algébrique C, de classe n, et une série de coniques homofocales, ayant pour foyers les points f et f' : le produit des distances du point f (ou f') aux 2n tangentes communes à C et à l'une des coniques est proportionnel à la puissance 2n du petit axe de cette conique.

36. Les coordonnées du pied de la normale menée de l'origine à la droite $U\xi + V\eta + 1 = 0$ sont

$$\xi = \frac{-U}{U^2 + V^2}, \qquad \eta = \frac{-V}{U^2 + V^2}.$$

On a

$$d\xi = \frac{dU(U^2 - V^2) + 2UV\,dV}{(U^2 + V^2)^2}$$

et, en coordonnées homogènes,

$$d\xi = \frac{(u^2 - v^2) f'_v - 2uv f'_u}{f'_v (u^2 + v^2)^2} (w\,du - u\,dw).$$

La fonction $\Theta(t)$ est ici

$$\Theta(t) = \frac{(u^2 - v^2) f'_v - 2uv f'_u}{f'_v (u^2 + v^2)^2} \frac{wu' - uw'}{\frac{F}{\varphi} - \lambda}.$$

En raisonnant comme au n° **27**, on voit que :

Le centre des moyennes distances des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes communes à une courbe algébrique et à chacune des courbes d'un faisceau tangentiel homofocal, décrit une droite.

Le centre des moyennes distances des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes communes à une courbe algébrique et à chacune des courbes d'un faisceau tangentiel décrit une droite quand, parmi les courbes du faisceau, il en est une qui admet pour foyers tous les foyers de la première courbe.

57. De même, si l'on observe que les courbes dont l'équation tangentielle est de la forme $F - \lambda(u^2 + v^2)^2 \varphi = 0$ ont à la fois mêmes foyers et mêmes points de contact avec les droites isotropes issues de ces foyers, c'est-à-dire mêmes foyers et mêmes *directrices*, en appelant *directrice* correspondant à un foyer la droite qui joint les points de contact de la courbe avec les deux droites isotropes passant par ce foyer, on peut énoncer les propositions suivantes :

Le centre des moyennes distances des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque sur les tangentes communes à deux courbes algébriques reste fixe quand l'une de ces courbes varie en conservant ses foyers et les directrices correspondantes.

Le centre des moyennes distances des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque sur les tangentes communes à une courbe algébrique et à chacune des courbes d'un faisceau tangentiel reste fixe, si, parmi les courbes du faisceau, il en est une qui admette

pour foyers et pour directrices correspondantes les foyers et les directrices de la première.

38. Soit toujours posé

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{U^2 + V^2}},$$

on a

$$\delta\, d\delta = \frac{(uf'_v - vf'_u)w}{f'_v(u^2 + v^2)^2}(w\, du - u\, dw).$$

Il résulte de cette expression que :

La somme des carrés des distances d'un point quelconque aux tangentes, communes à deux courbes algébriques, reste constante, quand l'une de ces courbes varie en conservant ses foyers et les directrices correspondantes.

La somme des carrés des distances d'un point quelconque aux tangentes communes à une courbe algébrique et à chacune des courbes d'un faisceau tangentiel reste constante, si, parmi les courbes du faisceau, il en est une qui admette pour foyers et pour directrices correspondantes les foyers et les directrices de la première.

39. Nous terminerons ce Chapitre par la remarque suivante, qui montre combien la méthode générale se plie aisément aux applications.

Considérons la courbe

$$U^2(aU + bV)^2 - \lambda(U^2 + V^2) = 0.$$

C'est l'enveloppe d'une droite de longueur égale à $\frac{b}{\sqrt{\lambda}}$, dont les deux extrémités s'appuient respectivement sur les droites

$$\eta = 0, \qquad a\eta - b\xi = 0.$$

En coordonnées homogènes, on a pour son équation

$$u^2(au + bv)^2 - \lambda(u^2 + v^2)w^2 = 0.$$

On déduirait aisément de là, par la méthode générale, les théorèmes suivants, dont quelques-uns ont été déjà démontrés plus haut, sous forme plus générale.

Soient C *une courbe quelconque de classe* n; D_1 *et* D_2 *deux droites quelconques, se coupant en un point* O.

Les tangentes à C *se partagent en systèmes de* $4n$ *droites, telles que les segments interceptés par les droites* D_1 *et* D_2 *sur les tangentes d'un même système soient égaux entre eux :*

1° *Tous ces systèmes ont même orientation.*

2° *Le produit des distances du point* O *aux tangentes d'un même système est constant.*

3° *La somme des distances du point* O *aux tangentes d'un même système est constante.*

4° *Le centre des moyennes distances des pieds des perpendiculaires abaissées de* O *sur les tangentes d'un même système décrit une droite.*

5° *Le centre des moyennes distances des points où les tangentes d'un même système rencontrent la droite* D_1 (*ou* D_2) *est fixe.*

6° *La polaire du point* O *par rapport aux tangentes d'un même système est une droite fixe.*

On comprend que les applications de cette nature peuvent être multipliées indéfiniment; comme elles ne présentent aucune difficulté spéciale, nous ne les poursuivrons pas ici, nous réservant d'exposer et de développer, dans un autre travail, les résultats principaux auxquels nous sommes parvenu par cette méthode.

TROISIÈME PARTIE.

DES COURBES DE DIRECTION.

—

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

40. Laguerre a le premier introduit dans la Géométrie la notion des *courbes de direction*, c'est-à-dire des courbes qui peuvent être regardées comme l'enveloppe de droites ayant un sens déterminé.

Au point de vue analytique, ces courbes sont telles que la distance d'un point quelconque du plan à une tangente soit fonction rationnelle des coordonnées du point de contact.

D'après cette définition, l'équation générale des courbes de direction sera, en coordonnées tangentielles,

$$(U^2+V^2)F^2(U,V)=\varphi^2(U,V),$$

F et φ étant deux polynômes entiers en U et V. En coordonnées cartésiennes rectangulaires, la courbe $f(\xi,\eta)=0$ sera de direction si l'expression $f_\xi'^2+f_\eta'^2$ est le carré d'une fonction rationnelle de ξ, η pour toutes les valeurs des variables satisfaisant à l'équation $f(\xi,\eta)=0$.

Il résulte de là que *l'arc d'une courbe de direction s'exprime par une intégrale abélienne appartenant à la courbe;* nous pourrons donc appliquer à ces arcs les théorèmes établis pour les intégrales abéliennes, et ces applications constitueront l'objet de la troisième Partie du présent travail. Toutefois, avant d'aborder cette étude, nous examinerons de plus près la forme de la différentielle de l'arc d'une courbe de direction, et nous indiquerons quelques propriétés qui se déduisent immédiatement de l'expression obtenue.

41. D'après ce qui précède, si la courbe $f(x,y,z)=0$ est de di-

rection, on a identiquement

$$(1) \qquad N^2(f_x'^2 + f_y'^2) = M^2 + Pf,$$

M, N et P étant des polynômes entiers en x, y, z.

Cette identité peut se mettre sous la forme plus simple

$$f_x'^2 + f_y'^2 = \psi^2 + \chi f,$$

ψ et χ étant des polynômes entiers.

Pour le démontrer, nous rappellerons un théorème que nous avons démontré, dans un travail antérieur, sur l'*Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques* (¹).

Supposons les coordonnées des points de la courbe $f = 0$ mises sous la forme

$$x = \theta_1(t), \qquad y = \theta_2(t), \qquad z = \theta_3(t),$$

où θ_1, θ_2, θ_3 sont des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de t, de degré μ et de genre p, ayant k zéros communs dans le polygone générateur; le degré n de la courbe $f = 0$ sera égal à $2\mu(p-1) - k$ (n° **5**).

Cela posé, soit $\theta(t)$ une fonction thêtafuchsienne holomorphe, de degré μq, admettant comme zéro multiple d'ordre q chacun des k zéros communs à x, y, z : elle sera fonction rationnelle de θ_1, θ_2, θ_3; pour que cette fonction rationnelle soit une fonction entière, il faut et il suffit (et c'est en cela que consiste le théorème démontré dans le travail précité) qu'on ait, en désignant par ε, ε' les arguments qui correspondent à l'un quelconque des points doubles de la courbe $f = 0$,

$$\theta(\varepsilon) : \theta_1^q(\varepsilon) = \theta(\varepsilon') : \theta_1^q(\varepsilon').$$

Remplaçons maintenant, dans l'identité (1), x, y, z par $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_3(t)$; il vient, puisque $f = 0$,

$$(f_x'^2 + f_y'^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{M}{N}.$$

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1886.

Cette équation montre que la fonction de t, $(f_x'^2 + f_y'^2)^{\frac{1}{2}}$, qui n'a évidemment pas d'infinis dans le polygone générateur, est une fonction thêtafuchsienne *holomorphe* de degré $\mu(n-1)$; elle admet, d'ailleurs, comme zéros multiples d'ordre $n-1$ chacun des zéros communs à θ_1, θ_2, θ_3; désignons-la par $\theta(t)$.

On a évidemment

$$\theta(\varepsilon) : \theta_1^{n-1}(\varepsilon) = \theta(\varepsilon') : \theta_1^{n-1}(\varepsilon'),$$

puisque, f_x' et f_y' s'annulant au point double $(\varepsilon, \varepsilon')$, $\theta(\varepsilon)$ et $\theta(\varepsilon')$ sont nuls. Par suite, $\theta(t)$ est une fonction entière, de degré $n-1$, de θ_1, θ_2, θ_3.

Soit $\psi(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ cette fonction.

On a, tout le long de la courbe $f = 0$,

$$f_x'^2 + f_y'^2 = \psi^2(x, y, z),$$

et, par suite, il vient identiquement, quels que soient x, y, z,

(2) $$f_x'^2 + f_y'^2 = \psi^2 + \chi f,$$

ψ et χ étant respectivement des polynômes de degrés $n-1$ et $n-2$.

De là résultent, pour l'arc de la courbe $f = 0$, les expressions

(3) $$ds = \frac{\psi}{f_\eta'} d\xi = \frac{\psi}{f_y'} \frac{z\,dx - x\,dz}{z^2}.$$

De l'identité (2) on déduit sans difficulté que la courbe $\psi = 0$ est une courbe adjointe de la courbe $f = 0$, et que, si cette dernière a un contact d'ordre h en un point avec la droite de l'infini $z = 0$, la courbe $\psi = 0$ a en ce point, avec la même droite, un contact d'ordre $h-1$.

Cette identité met également en évidence la propriété géométrique suivante des courbes de direction :

Les tangentes qu'on peut mener à une courbe de direction par les points cycliques de son plan, et dont les points de contact sont à distance finie, sont des tangentes d'inflexion.

En d'autres termes :

Les foyers, non singuliers et à distance finie, d'une courbe de direction, sont les centres de cercles de rayon nul biosculateurs à la courbe.

42. L'expression

$$ds = \frac{\psi}{f'_\eta}\, d\xi$$

montre que, si l'on s'est donné la fonction ψ, qui n'est déterminée qu'au signe près, l'élément d'arc compris entre les points ξ, η et $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$ a un signe et, par suite, un sens déterminé. Ce sens définit également celui de la semi-droite qui touche la courbe au point ξ, η. Si l'on change le signe de ψ, le sens change pour toute la courbe.

Il existe toutefois des courbes de direction pour lesquelles la fonction ψ a plusieurs valeurs différentes; ces courbes sont nécessairement décomposables en courbes de degré moindre.

Si l'on a, en effet,

$$f'^2_x + f'^2_y = \psi^2 + \chi f = \psi_1^2 + \chi_1 f,$$

on en conclut

$$(\psi - \psi_1)(\psi + \psi_1) = f(\chi_1 - \chi),$$

et, comme ψ et ψ_1 sont de degré $n - 1$, tandis que f est de degré n, il faut que la courbe $f = 0$ se décompose en courbes de degré moindre, qui seront évidemment des courbes de direction.

Soit alors $f = F\varphi$, avec les relations

$$F'^2_x + F'^2_y = G^2 + DF,$$

$$\varphi'^2_x + \varphi'^2_y = \Gamma^2 + \Delta\varphi,$$

on a

$$(4)\quad \begin{cases} f'^2_x + f'^2_y = \varphi^2(G^2 + DF) + F^2(\Gamma^2 + \Delta\varphi) + 2F\varphi(F'_x\varphi'_x + F'_y\varphi'_y) \\ \qquad = (\varphi G - F\Gamma)^2 + AF\varphi \\ \qquad = (\varphi G + F\Gamma)^2 + BF\varphi, \end{cases}$$

A et B étant des polynômes entiers. On voit ainsi que ψ a les quatre valeurs $\pm(\varphi G - F\Gamma)$ et $\pm(\varphi G + F\Gamma)$, qui correspondent évidemment aux quatre combinaisons que l'on peut faire en associant la courbe $F = 0$ ou cette courbe parcourue en sens inverse avec la courbe $\varphi = 0$ ou avec cette courbe parcourue en sens inverse.

43. Les courbes de direction jouent, dans la théorie des surfaces algébriques, un rôle important, qui n'a peut-être pas été remarqué, et que le théorème suivant met en évidence :

Toute ligne de courbure plane, non singulière, d'une surface algébrique est une courbe de direction, dans le cas où l'angle constant sous lequel son plan coupe la surface n'est ni nul ni droit.

Ou encore :

Tout plan qui coupe une surface algébrique, le long d'une courbe non singulière, sous un angle constant, qui n'est ni nul, ni droit, la coupe suivant une courbe de direction.

Soit, en effet, la surface $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$, coupée par le plan $\zeta = 0$ sous un angle V, tout le long de la courbe $f(\xi, \eta) = 0$.

On a

$$(5) \qquad F(\xi, \eta, \zeta) = f(\xi, \eta)\varphi(\xi, \eta, \zeta) + \zeta\chi(\xi, \eta, \zeta)$$

et, tout le long de la courbe $\zeta = 0$, $f(\xi, \eta) = 0$,

$$(6) \qquad F_\xi'^2 + F_\eta'^2 + F_\zeta'^2 = \frac{1}{\cos^2 V} F_\zeta'^2.$$

Or, le long de cette courbe, on a, d'après (5),

$$F_\xi' = \varphi(\xi, \eta, 0) f_\xi'; \qquad F_\eta' = \varphi(\xi, \eta, 0) f_\eta'; \qquad F_\zeta' = \chi(\xi, \eta, 0).$$

La relation (6) devient

$$\varphi^2(\xi, \eta, 0)(f_\xi'^2 + f_\eta'^2) = \chi^2(\xi, \eta, 0)\,\mathrm{tang}^2 V,$$

et, par suite, la courbe $f = 0$ est bien de direction, si $\tang V$ n'est ni nul, ni infini, et si f'_ξ et f'_η ne sont pas nuls le long de la courbe.

De là résulte cette conséquence importante que les transformations qui conservent les lignes de courbure changent une courbe de direction en une autre courbe de direction ; en particulier :

Toute transformation par rayons vecteurs réciproques dans le plan fait correspondre à une courbe de direction une autre courbe de direction.

Cette proposition, qu'on peut d'ailleurs vérifier directement, nous sera utile plus tard.

COURBES DE DIRECTION DU TROISIÈME ORDRE.

44. Les considérations qui précèdent vont nous permettre de trouver les courbes de direction les plus simples après la ligne droite et le cercle, c'est-à-dire les courbes de direction du troisième ordre.

Cherchons d'abord les courbes de direction du troisième ordre, ne touchant pas la droite de l'infini, ne passant pas par les points cycliques du plan et n'ayant pas de point singulier.

Si $f = 0$ est l'équation d'une telle courbe, on a, comme toujours,

$$f'^2_x + f'^2_y = \psi^2 + \chi f.$$

Il résulte de cette équation que chacune des coniques $f'_x \pm i f'_y$ touche la courbe en trois points, situés sur la conique $\psi = 0$; les tangentes à $f = 0$ en ces points passent, d'ailleurs, par l'un des points cycliques du plan : on peut donc mener par l'un de ces points, $z = 0$, $\frac{y}{x} = i$ par exemple, trois tangentes à la conique $f'_x + i f'_y = 0$. Les coniques $f'_x \pm i f'_y = 0$ doivent, par suite, se réduire à une droite double. On a ainsi, en supposant $f(x, y)$ réel,

$$f'_x + i f'_y = (A + Bi)^2, \qquad f'_x - i f'_y = (A - Bi)^2;$$

d'où

$$f'_x = A^2 - B^2, \qquad f'_y = 2AB;$$

A et B sont deux polynômes réels du premier degré en x, y, z. Écrivons maintenant que les valeurs de f''_{xy} tirées de celles de f'_x et f'_y sont égales; nous arriverons ainsi à la forme de A et B et, par suite, à celle de f.

Sans entrer dans les détails de ce calcul, qui ne présente aucune difficulté, nous dirons seulement que, en prenant pour axe des ξ la droite $A = 0$, on arrive à trouver (¹)

$$f'_x = x^2 - y^2, \qquad f'_y = -2xy;$$

d'où

$$f = \tfrac{1}{3}x^3 - xy^2 + \lambda z^3 = 0,$$

λ étant une constante arbitraire. On peut écrire cette équation

$$(7) \qquad x^3 - 3xy^2 = a^3 z^3 \qquad \text{ou} \qquad \xi^3 - 3\xi\eta^2 = a^3.$$

On démontrerait ensuite, sans difficulté, qu'il n'existe pas de courbes de direction réelles du troisième ordre, indécomposables, sans point double, touchant la droite de l'infini ou passant par les points cycliques : il ne reste plus qu'à chercher les cubiques de direction à point double.

43. Si une cubique à point double est de direction, il faut, puisque les tangentes issues des points cycliques doivent être d'inflexion, et puisque la courbe n'a que trois points d'inflexion, que la cubique touche la droite de l'infini en trois points confondus, et admette deux autres points d'inflexion, à distance finie, tels que les tangentes en ces points passent respectivement par les points cycliques.

Son équation peut donc se mettre sous la forme

$$z(x^2 + y^2) = \lambda(x + az)^3.$$

Écrivant qu'elle a un point double, on trouve

$$27a\lambda = 4$$

(¹) On trouverait également dans le courant du calcul des courbes de direction du troisième ordre se décomposant en courbe de direction de degré moindre.

et on vérifie qu'elle est de direction. On a en effet

$$f_x'^2 + f_y'^2 = (x + az)^2 [3\lambda(x + az) - \tfrac{4}{3} z]^2.$$

Nous avons donc une seconde catégorie de cubiques de direction données par l'équation

$$(8) \qquad 27m(\xi^2 + \eta^2) = (\xi + 4m)^3.$$

46. Les cubiques de direction sont, d'ailleurs, remarquables à plus d'un titre. Considérons d'abord celles de la première catégorie. Nous savons que les tangentes qu'on peut leur mener par les points cycliques du plan sont d'inflexion, et que les points de contact des trois tangentes issues d'un même point cyclique sont sur une droite. Comme on a

$$f_x' + if_y' = -3(y + ix)^2, \qquad f_x' - if_y' = -3(y - ix)^2,$$

on voit que les points de contact des tangentes issues d'un point cyclique sont sur la droite qui joint l'autre point cyclique à l'origine. Si l'on remarque, de plus, que les trois asymptotes sont des tangentes d'inflexion, et qu'elles concourent à l'origine, on peut énoncer la propriété suivante de la courbe :

Le triangle formé par l'origine et les deux points cycliques est tel que les tangentes qu'on peut mener à la courbe par l'un des sommets de ce triangle sont trois tangentes d'inflexion, et que leurs points de contact sont sur le côté opposé.

L'existence d'un pareil triangle caractérise une cubique *équianharmonique*.

Inversement, toute cubique équianharmonique peut être projetée suivant une courbe de direction : il suffit de faire coïncider les projections de deux des sommets de son triangle inflexionnel avec les points cycliques du nouveau plan.

En coordonnées polaires, l'équation des cubiques de direction prend une forme simple. Si l'on pose

$$\xi = \rho \cos\omega, \qquad \eta = \rho \sin\omega,$$

on trouve

$$\rho^3(\cos^3\omega - 3\cos\omega\sin^2\omega) = a^3 \qquad \text{ou} \qquad \rho^3\cos 3\omega = a^3.$$

Ces courbes appartiennent donc à la classe si remarquable des courbes $\rho^n = A\cos n\omega$, sur lesquelles nous aurons à revenir plus tard.

Il nous sera également utile, dans la suite, de connaître l'expression des coordonnées des points de la cubique (7) en fonction elliptique d'un paramètre.

Soit pu la fonction de M. Weierstrass, correspondant au cas de $g_2 = 0$. On a

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_3.$$

Si l'on pose

$$\xi = \frac{a g_3^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{pu},$$

$$\eta = \frac{a g_3^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\sqrt{-3g_3}} \frac{p'u}{pu},$$

on trouve, en éliminant pu et $p'u$ entre ces trois relations,

$$\xi^3 - 3\xi\eta^2 = a^3.$$

Examinons maitenant les cubiques données par l'équation (8).

En coordonnées polaires, on a aisément

$$\rho^{\frac{1}{3}}\cos\tfrac{1}{3}\omega = m^{\frac{1}{3}},$$

équation d'une forme analogue à celle trouvée plus haut, et qu'on sait appartenir à la caustique par réflexion d'une parabole, les rayons lumineux étant perpendiculaires à l'axe.

PROPRIÉTÉS DES ARCS DES COURBES DE DIRECTION.

47. Soit

$$ds = \frac{\psi}{f'_\eta} d\xi = \frac{\psi}{f'_y} \frac{z\,dx - x\,dz}{z^2}$$

la différentielle de l'arc d'une courbe de direction, $f = 0$, de degré n.

La somme des arcs compris sur cette courbe, entre les points d'intersection de $f=0$ avec les deux courbes de degré m, $F-u_0\varphi=0$, $F-u\varphi=0$, est donnée par la formule fondamentale établie dans la première Partie; elle est égale à $-\sum\int_{u_0}^{u} r_\beta\, du$, en désignant par Σr_β la somme des résidus, par rapport aux zéros de $z^2 f'_y$, de la fonction de t,

$$\Theta(t)=\frac{\psi(x'z-z'x)}{f'_y z^2\left(\frac{F}{\varphi}-u\right)}.$$

La courbe $\psi=0$ étant une courbe adjointe, on n'a pas à s'occuper des zéros de f'_y qui correspondent à des points singuliers de $f=0$ et qui donneraient des résidus nuls; on sait d'ailleurs que les autres zéros de f'_y annulent $x'z-z'x$; il n'y a donc à former que les résidus qui correspondent à des zéros β de z.

Avant d'aborder la question à ce point de vue général, nous énoncerons les propositions qui, d'après les principes posés dans la première Partie, se déduisent immédiatement de la forme de $\Theta(t)$.

I. *La somme des arcs interceptés sur une courbe de direction par deux courbes quelconques de même degré et n'ayant, avec la première, aucune direction asymptotique commune est nulle, si, parmi les courbes du faisceau déterminé par ces dernières, il en est une qui admette pour asymptotes toutes les asymptotes de la courbe de direction.*

La somme des arcs interceptés sur une courbe de direction par deux courbes quelconques, ayant les mêmes asymptotes, est nulle, pourvu que les courbes sécantes n'aient, avec la proposée, aucune direction asymptotique commune.

Pour compléter ces propositions, il reste à examiner le cas où toutes les courbes du faisceau sécant, $F-u\varphi=0$, passent par un ou plusieurs points à l'infini sur la courbe $f=0$.

Si $F(t)$ admet q fois le zéro β, il faudra, pour que β n'annule pas le dénominateur de $\Theta(t)$, que $\varphi(t)$ admette $q+2$ fois ce zéro; ce cas se présente en particulier si $\varphi(x,y,z)$ est de la forme $z^{q+2}\varphi_1(x,y,z)$. Par suite :

La somme des arcs à distance finie interceptés sur une courbe de direction par deux courbes de même degré ayant, avec la première, des contacts d'ordre p_1, p_2, ... en des points a_1, a_2, ... à l'infini, est nulle, si, parmi les courbes du faisceau déterminé par les courbes sécantes, il en est une qui ait, avec la courbe de direction, des contacts d'ordre $p_1 + 2$, $p_2 + 2$, ... aux points a_1, a_2, ...

Cette somme est nulle, en particulier, si les deux courbes sécantes ont entre elles, en TOUS *leurs points à l'infini, un contact d'ordre $p + 2$, p désignant le plus grand des nombres p_1, p_2, ...*

INTERSECTION D'UNE COURBE DE DIRECTION ET D'UN FAISCEAU DE COURBES ASYMPTOTIQUES.

48. Avant d'examiner le cas général, où les courbes du faisceau sécant sont quelconques, il nous sera utile d'étudier, avec quelques détails, le cas où ces courbes sont asymptotiques entre elles, c'est-à-dire le cas où $\varphi(x, y, z)$ est de la forme $z\varphi_1(x, y, z)$, φ_1 étant un polynôme de degré $m - 1$.

La fonction $\Theta(t)$ s'écrit alors

$$\Theta(t) = \frac{\psi(x'z - xz')}{f'_y z\left(\frac{F}{\varphi_1} - uz\right)}.$$

Supposons que la courbe $F = 0$ ne passe par aucun des points à l'infini sur $f = 0$. Les points à l'infini sur la courbe $f = 0$ peuvent être des points ordinaires, à tangente distincte ou non de la droite de l'infini, des points multiples à branches séparées ou tangentes entre elles.

Soit β l'argument de l'un de ces points.

Si le point est simple, β est un zéro simple de $z(t)$; on peut, d'ailleurs, supposer que les axes des coordonnées ξ et η ont été choisis de façon que la courbe $f = 0$ n'ait aucun point à l'infini dans la direction de ces axes; alors $x(\beta)$ et $y(\beta)$ ne sont pas nuls. On a, en ce cas, pour le résidu

$$-r_\beta = \left(\frac{\psi x \varphi_1}{f'_y F}\right)_\beta.$$

Si le point est simple et si la droite de l'infini a en ce point, avec la

courbe, un contact d'ordre p, β est un zéro d'ordre $p+1$ de $z(t)$, et l'on a

$$-r_\beta = (p+1)\left(\frac{\psi x \varphi_1}{f'_y \mathrm{F}}\right)_\beta.$$

Si le point est un point multiple d'ordre h à branches séparées, les h valeurs de l'argument qui lui correspondent sont distinctes et le résidu qui correspond à chacune d'elles a la même forme que dans le cas du point ordinaire; si plusieurs branches de la courbe sont tangentes entre elles au point β, $p+1$ valeurs de l'argument sont égales, et l'on a pour le résidu correspondant la même expression que dans le cas du point où la droite de l'infini a un contact d'ordre p avec la courbe.

Dans tous les cas, on a, si β est l'argument d'un point à l'infini sur la courbe $f=0$,

$$\left[\frac{\psi}{f'_y}\right]_\beta = \left[\sqrt{1+\frac{f'^2_x}{f'^2_y}}\right]_\beta.$$

Or la relation

$$\frac{f'_x}{yz'-zy'} = \frac{f'_y}{zx'-xz'}$$

donne, dans tous les cas, pour $t=\beta$, puisque $x(\beta)$ et $y(\beta)$ sont différents de zéro, et que $z(t)$ est de la forme $(t-\beta)^q z_1$, z_1 ne s'annulant plus pour $t=\beta$,

$$\left[\frac{f'_x}{f'_y}\right]_\beta = -\frac{y}{x}.$$

On en tire

$$\left[\frac{\psi}{f'_y}\right]_\beta = \left[\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right]_\beta,$$

et par suite les deux expressions données pour r_β deviennent

$$\left[\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\,\frac{x\varphi_1}{\mathrm{F}}\right]_\beta \quad \text{et} \quad (p+1)\left[\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\,\frac{x\varphi_1}{\mathrm{F}}\right]_\beta.$$

On devra donner au radical, dans ces expressions, le signe de $\frac{\psi}{f'_y}$ pour $t=\beta$.

Cette valeur de t annulant z, il résulte des expressions précédentes que la valeur de r_β ne dépend, en supposant que les courbes $\mathrm{F}=0$ et $\varphi_1=0$ ne passent pas simultanément par le point β, que de la valeur

de $\frac{y}{x}(\beta)$, c'est-à-dire de la direction asymptotique correspondante, et du signe de $\frac{\psi}{f'_y}$ pour $t=\beta$.

Or, d'une manière générale, on a, sur une courbe de direction,

$$ds = \frac{\psi}{f'_\eta}\,d\xi,$$

et le sens de l'arc élémentaire, par suite aussi celui de la tangente qui est le même, est déterminé par le signe de $\frac{\psi}{f'_\eta}$; inversement, si, en deux points a et b situés sur une même courbe de direction ou sur deux courbes de direction différentes, les tangentes sont parallèles et de même sens, les valeurs de $\frac{\psi}{f'_\eta}$ auront le même signe pour les deux courbes. En particulier, le signe de $\frac{\psi}{f'_y}$ sera le même, en un point à l'infini, commun à deux courbes de direction, si les asymptotes correspondantes des deux courbes sont parallèles et de même sens.

Il résulte de cette discussion que les valeurs des résidus r_β ne changent pas si l'on remplace la courbe $f=0$ par une autre courbe de direction de même degré, ayant ses asymptotes parallèles à celles de la première et de même sens.

On peut, en particulier, choisir la courbe formée par les semi-droites menées par un point quelconque parallèlement aux asymptotes de $f=0$, et de même sens que ces asymptotes : nous dirons que ce faisceau de semi-droites est *asymptotique* à la courbe de direction.

Si la courbe $f=0$ a en un point un contact d'ordre q avec la droite de l'infini, ou si elle a en un point multiple à l'infini $q+1$ branches tangentes entre elles, et correspondant à une même valeur de t, le faisceau de semi-droites asymptotiques comprendra $q+1$ droites parallèles à la direction asymptotique correspondante, et toutes *de même sens*. Ce sens est, en effet, déterminé par le signe de $\frac{\psi}{f'_y}$, fonction qui n'a évidemment qu'une seule valeur pour la valeur unique de t qui correspond au point ou aux branches considérées.

Remarquons enfin que, dans tous les cas, et quelle que soit la nature du point à l'infini d'argument β, r_β est nul si ce point est l'un des

points cycliques du plan : il n'y aurait d'exception que si F s'annulait pour $t = \beta$, c'est-à-dire si toutes les courbes du faisceau sécant passaient par le point considéré, cas que nous avons écarté.

49. De cette discussion résultent les théorèmes suivants :

II. *La somme des arcs interceptés sur une courbe de direction par deux courbes asymptotiques quelconques est égale à la somme des segments interceptés par les mêmes courbes sur tout faisceau de semi-droites asymptotiques à la première.*

Si la courbe de direction ne touche pas la droite de l'infini, la somme des arcs interceptés est égale à la somme des segments interceptés sur les asymptotes.

La somme des arcs interceptés par deux courbes asymptotiques sur une courbe de direction, qui n'a pas d'autres points à l'infini que les points cycliques du plan, est toujours nulle.

On suppose, dans tous ces énoncés, que les courbes sécantes n'ont aucune direction asymptotique commune avec la courbe de direction considérée.

50. De ces théorèmes découle immédiatement la solution du problème suivant :

Trouver toutes les courbes de direction sur lesquelles la somme des arcs interceptés par deux courbes asymptotiques est toujours nulle (¹).

Pour qu'une courbe de direction jouisse de cette propriété, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que *les directions asymptotiques non isotropes soient deux à deux parallèles et de sens contraire.*

Cette condition est remplie en particulier, comme on l'a dit plus haut, si la courbe n'a pas d'autres points à l'infini que les points cycliques.

(¹) Les courbes sécantes sont supposées n'avoir aucune direction asymptotique commune avec la proposée.

En dehors des points cycliques, qui pourront être des points simples ou multiples de la courbe, tous les autres points à l'infini devront être des points multiples, d'ordre pair. Si l'un de ces points est à branches séparées, et d'ordre $2p$, p des asymptotes correspondantes devront être de sens opposé aux p autres. Si le point a p branches tangentes entre elles et formant un *cycle* [1], c'est-à-dire correspondant à la même valeur de t, il faudra que les asymptotes relatives aux p autres branches soient de sens opposé à l'asymptote relative au cycle. Enfin, si la courbe a en un point avec la droite de l'infini un contact d'ordre p pour une de ses branches, il faudra qu'une autre branche ait au même point avec la même droite un contact du même ordre, et que les directions asymptotiques qui correspondent aux deux branches soient de sens contraire.

51. Les plus intéressantes des courbes que l'on vient de rencontrer sont celles qui ne rencontrent la droite de l'infini qu'aux points cycliques; elles présentent d'ailleurs, dans la catégorie des courbes de direction, une grande généralité, puisque les transformées par rayons vecteurs réciproques d'une courbe de direction quelconque à partir d'un point non situé sur cette courbe sont des courbes de direction (n° **45**) n'ayant pas d'autres directions asymptotiques que les directions isotropes. Une courbe de direction quelconque donne ainsi naissance à une infinité de courbes de la classe qui nous occupe.

Cette propriété permet de définir analytiquement ces courbes; elles sont l'enveloppe des cercles

$$u\xi + v\eta = \lambda(\xi^2 + \eta^2), \tag{9}$$

λ étant une constante, et u, v deux paramètres liés par une relation de la forme

$$(u^2 + v^2)\,F^2(u, v) = \varphi^2(u, v). \tag{10}$$

---

[1] Nous appellerons *cycle*, d'après M. Halphen, l'ensemble des branches d'une courbe qui correspondent, en un point de cette courbe, à une même valeur de la variable auxiliaire, à l'aide de laquelle les coordonnées sont exprimées d'une manière uniforme aux environs du point considéré.

Cette relation est en effet l'équation tangentielle générale des courbes de direction, et le cercle (9) est la transformée par rayons vecteurs réciproques, à partir de l'origine, de la tangente $u\xi + v\eta + 1 = 0$. Il faut toutefois que la courbe représentée par l'équation tangentielle (10) ne passe pas par l'origine.

COURBES CYCLIQUES DE DIRECTION.

52. Les courbes de direction qui ne coupent la droite de l'infini qu'aux points cycliques du plan, et que nous appellerons, pour abréger, *courbes cycliques de direction*, présentent une particularité analytique remarquable et dont les conséquences géométriques ont un grand intérêt : c'est que la fonction $\psi(x, y, z)$ correspondante est généralement de la forme $z\psi_1$, la courbe $\psi_1 = 0$ étant une courbe adjointe de la courbe de direction considérée, et la fonction $\frac{\psi_1}{f'_{y}}$ restant par suite finie aux points multiples de cette courbe.

Supposons d'abord que la courbe cyclique $f = 0$, de degré 2ν, ait, en chacun des points cycliques I et J, un point multiple d'ordre ν, à branches séparées, et qu'elle ne touche pas la droite de l'infini. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ les valeurs de l'argument qui correspond aux ν branches passant par I. Les courbes $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ ont en I un point multiple d'ordre $\nu - 1$, et par suite les fonctions de t, f'_x et f'_y admettent $\nu - 1$ fois chacun des zéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$. Il en est de même de la fonction ψ, vertu de l'identité

$$f'^2_x + f'^2_y = \psi^2 + \chi f.$$

Mais de plus la fonction $\frac{\psi}{f'_y}$ s'annule pour $t = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$. On a en effet, comme on l'a vu plus haut,

$$\frac{f'_x}{yz' - zy'} = \frac{f'_y}{zx' - xz'};$$

d'où l'on tire

$$(11) \qquad \frac{\psi^2}{f'^2_y} = \frac{z'^2(x^2 + y^2) - 2zz'(xx' + yy') + z^2(x'^2 + y'^2)}{(z'x - x'z)^2}.$$

Par hypothèse, $z'(t)$ ne s'annule pas pour $t = \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$, puisque la droite de l'infini ne touche pas la courbe $f = 0$; le dénominateur de l'expression précédente n'est donc pas nul, tandis que le numérateur est nul, en même temps que z et $x^2 + y^2$. On en conclut que ψ admet au degré ν de multiplicité au moins les zéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, ce qui ne peut se faire que si la courbe $\psi = 0$ a un point multiple d'ordre ν en I. Le même raisonnement se répète au point J, et, comme ψ est de degré $2\nu - 1$, la courbe $\psi = 0$ se décompose en la droite de l'infini et en une courbe de degré $2\nu - 2$, ayant un point multiple d'ordre $\nu - 1$ en chacun des points I et J. C'est la proposition qu'il s'agissait d'établir.

Ce théorème peut cesser d'être vrai si la courbe $f = 0$ a, aux points I et J, des branches tangentes entre elles et correspondant à une même valeur du paramètre, ou si elle touche la droite de l'infini.

Soit en effet α une des valeurs de l'argument qui correspondent au point I; on aura, en posant $t - \alpha = \tau$, dans les environs du point α,

$$(12)\qquad \begin{cases} z = c\tau^q + c_1\tau^{q+1} + \ldots, \\ x = p \;\; + a\tau^r \;\; + a_1\tau^{r+1} + \ldots, \\ y = pi \; + b\tau^r \;\; + b_1\tau^{r+1} + \ldots; \end{cases}$$

d'où

$$x + yi = \mathrm{A}\tau^s + \mathrm{A}_1\tau^{s+1} + \ldots,$$

s étant au moins égal à r.

Si la tangente correspondante n'est pas la droite de l'infini, ce sera, par un choix convenable de l'origine des coordonnées, la droite $x + yi = 0$, et la quantité s sera supérieure à q. L'ordre du *cycle* formé par les branches considérées sera q; la classe sera $s - q$ [1]. Dans l'expression donnée plus haut pour $\frac{\psi^2}{f_y'^2}$, on voit qu'au numérateur le terme de moindre degré en τ sera de l'ordre de τ^{2q-2+s}, et au déno-

[1] L'ordre d'un cycle est, d'après M. Halphen, le nombre de points confondus avec l'origine de ce cycle dans le nombre total des points d'intersection de la courbe et d'une droite différente de la tangente au cycle; si cette droite est la tangente, le nombre des points d'intersection confondus avec l'origine du cycle est égal à la somme de l'ordre et de la classe de ce cycle.

minateur de l'ordre de τ^{2q-2}; par suite, $\frac{\psi^2}{f_y'^2}$ sera de l'ordre de τ^s; le coefficient du terme en τ^s est d'ailleurs égal à

$$2c^2 q \mathrm{A} p[q-s]\frac{1}{q^2 c^2 p^2};$$

il n'est pas nul, car q est, par hypothèse, inférieur à s. Il en résulte que s est nécessairement pair, et que la fonction $\frac{\psi}{f_y'}$ admet le zéro α au degré $\frac{s}{2}$ de multiplicité. Par conséquent la valeur de $\frac{\psi}{zf_y'}$ pour $t=\alpha$ dépendra du signe de $q-\frac{s}{2}$, c'est-à-dire de la demi-différence entre l'ordre et la classe du cycle considéré. Dans le cas particulier où l'ordre est égal à la classe, $\frac{\psi}{zf_y'}$ reste fini pour $t=\alpha$; c'est précisément ce que nous avons vérifié plus haut pour le point multiple à branches séparées; $\frac{\psi}{zf_y'}$ s'annule pour $t=\alpha$ si la classe du cycle est supérieure à son ordre; enfin $\frac{\psi}{zf_y'}$ devient infini pour $t=\alpha$ si l'ordre est supérieur à la classe.

Si l'on suppose que la tangente correspondant au cycle α est la droite de l'infini $z=0$, on aura $q>s$; l'ordre du cycle sera s, sa classe $q-s$. L'expression $\frac{\psi^2}{zf_y'^2}$ sera toujours de l'ordre de τ^s et par suite α sera, pour la fonction $\frac{\psi}{zf_y'}$, un infini d'ordre égal à $q-\frac{s}{2}$, c'est-à-dire la somme de la classe et du demi-ordre du cycle considéré. Cet ordre devra être pair, et, en aucun cas, $\frac{\psi}{zf_y'}$ ne peut rester fini pour $t=\alpha$ (1).

INTERSECTION D'UNE COURBE CYCLIQUE DE DIRECTION ET DE DEUX COURBES QUELCONQUES.

53. La propriété de la fonction ψ, dans le cas où la courbe cyclique de direction n'a, aux points I et J, que des branches distinctes, et ne

(1) s étant pair, il y a au moins deux branches du cycle tangentes à la droite de l'infini; il en résulte que les courbes cycliques de direction, dont les branches à l'infini sont distinctes, ne touchent pas la droite de l'infini.

touche en aucun de ces points la droite de l'infini, permet d'exprimer simplement la somme des arcs interceptés sur cette courbe par deux courbes quelconques de degré m.

Il s'agit, en effet, d'évaluer les résidus par rapport aux zéros de $z(t)$ de la fonction

$$\Theta(t) = \frac{\psi(zx' - xz')}{f'_y z^2 \left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}.$$

Or, d'après l'hypothèse, $\frac{\psi}{zf'_y}$ reste fini pour tout zéro, β, de $z(t)$, et l'on a, pour le résidu correspondant à ce zéro, qui est un zéro simple de z,

$$r_\beta = -\left(\frac{\psi x}{zf'_y} \frac{1}{\frac{F}{\varphi} - u}\right)_\beta.$$

Pour calculer $\frac{\psi x}{zf'_y}$, reportons-nous aux relations (11) et (12). Dans ces dernières, on devra supposer, τ désignant la quantité $t - \beta$, que q est égal à 1, et s au moins égal à 2.

Soit d'abord $s = 2$, ce qui est le cas le plus général; la tangente à la branche β au point cyclique correspondant, I, a un contact simple avec cette branche.

On a donc

$$\begin{aligned} z &= c\tau + c_1\tau^2 + \ldots, \\ x + yi &= A\tau^2 + A_1\tau^3 + \ldots, \\ x - yi &= 2p + B\tau + \ldots \end{aligned}$$

Portant ces valeurs dans (11), on a

$$\frac{\psi^2}{f'^2_y} = \frac{-2c^2Ap\tau^2 + \ldots}{p^2c^2 + \mu\tau + \ldots}, \qquad \text{d'où} \qquad \left(\frac{x\psi}{zf'_y}\right)_\beta = \sqrt{\frac{-2Ap}{c^2}}.$$

Or, si l'on considère la courbe définie par les relations

$$\left\{\begin{aligned} z &= c\tau, \\ x + yi &= A\tau^2, \\ x - yi &= 2p, \end{aligned}\right.$$

τ désignant un paramètre variable, on voit que cette courbe est un cercle

$$x^2 + y^2 = \frac{2Ap}{c^2} z^2,$$

et que ce cercle a au point cyclique I un contact du second ordre avec la branche de courbe β. La courbe de direction étant supposée réelle, ce cercle aura également un contact du second ordre avec une des branches de la courbe au point cyclique J. Soit R son rayon; on a

$$\left(\frac{x\psi}{z f'_y}\right)_\beta = \pm R\sqrt{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad r_\beta = \pm \frac{Ri}{\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)_\beta}.$$

Or, si dans la fonction $\Theta(t)$ on avait considéré x, y, z comme représentant les coordonnées, non plus d'un point de la courbe de direction, mais d'un point du cercle, on aurait trouvé de même, pour le résidu correspondant à la valeur $\tau = 0$,

$$\left(\frac{F}{\varphi} - u\right) r = \sqrt{\frac{-2Ap}{c^2}} = \pm R\sqrt{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad r = \pm \frac{Ri}{\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}.$$

Le signe sera le même que celui de r_β, si l'on donne au cercle le sens même de la branche qu'il oscule; quant à la quantité $\frac{F}{\varphi} - u$, elle est la même dans r et dans r_β, puisqu'elle est égale à $\frac{F(1, i, 0)}{\varphi(1, i, 0)} - u$. Il n'y aurait d'exception que si les deux courbes $F = 0$ et $\varphi = 0$ passaient toutes deux par le point I.

54. De cette discussion résulte immédiatement la proposition suivante :

III. *La somme des arcs interceptés sur une courbe cyclique de direction, à branches cycliques distinctes, par deux courbes quelconques de même degré, est égale à la somme des arcs interceptés par ces mêmes courbes sur les cercles qui osculent à l'infini les branches de la courbe primitive.*

Il faut, toutefois, que les courbes sécantes ne passent pas simultanément par les points cycliques.

On arriverait à une conclusion analogue pour les courbes à branches tangentes entre elles à l'infini, dans le cas où $\frac{\psi}{z f'_y}$ reste fini et différent de zéro pour l'argument correspondant, c'est-à-dire dans le cas où la classe du cycle formé par ces branches est égale à son ordre.

35. Ces résultats vont nous permettre de *déterminer toutes les courbes de direction sur lesquelles la somme des arcs interceptés par deux courbes quelconques de même degré est toujours nulle.*

A priori, il est clair, d'après la théorie des intégrales abéliennes, que ces courbes sont celles dont l'arc s'exprime par une intégrale abélienne de *première espèce appartenant à la courbe;* les courbes cycliques de direction peuvent seules jouir de cette propriété.

En effet, soit $ds = \frac{\psi}{f'_y}\,\frac{zx' - xz'}{z^2}\,dt$ la différentielle de l'arc; les infinis de $\frac{ds}{dt}$ ne peuvent être que les zéros de z^2; or, pour que $\frac{ds}{dt}$ reste fini pour $z = 0$, il faut que ψ s'annule; mais nous avons trouvé que, pour une valeur β de t annulant z, on avait

$$\frac{\psi}{f'_y} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}.$$

Il est donc nécessaire que la courbe n'ait pas à l'infini d'autres points que les points cycliques.

Si maintenant α est un argument correspondant à un de ces points I, et si l'on désigne par δ et γ le degré et la classe du cycle relatif à cet argument, on sait que $\frac{\psi}{z f'_y}$ admet α pour zéro au degré de multiplicité $\frac{\gamma - \delta}{2}$; la quantité $\frac{zx' - xz'}{z}$ admet α comme infini simple; il en résulte, puisque $\frac{\gamma - \delta}{2}$ est nécessairement entier, que $\frac{ds}{dt}$ reste fini pour $t = \alpha$, si l'ordre du cycle est inférieur à sa classe. Dans le cas où la branche est simple, $\delta = 1$, il faut que γ soit supérieur à 1, c'est-à-dire que la tangente à la branche soit d'inflexion; comme d'ailleurs γ devra être égal

au moins à 3, la tangente aura un contact du troisième ordre au moins avec la branche.

56. On peut donc énoncer le théorème suivant :

IV. *La somme des arcs interceptés par deux courbes quelconques, de même degré, sur une courbe cyclique de direction ne touchant pas la droite de l'infini, est toujours nulle si cette courbe n'a, à l'infini, que des cycles dont la classe surpasse l'ordre.*

En particulier :

La somme des arcs interceptés par deux courbes quelconques, de même degré, sur une courbe cyclique de direction, est toujours nulle si les asymptotes de cette courbe sont toutes distinctes et inflexionnelles.

Les deux courbes sécantes peuvent avoir des points communs sur la courbe de direction, et ces points, *quels qu'ils soient*, même dans le cas où ils sont à l'infini, n'interviennent pas dans les théorèmes précédents; on n'a à tenir compte que des arcs compris sur la courbe de direction entre les autres points où elle est coupée par les deux courbes sécantes.

Ces propositions peuvent, d'ailleurs, se vérifier en remarquant que toutes les quantités r_β sont nulles dans les cas considérés.

Enfin :

Si la somme des arcs interceptés par deux courbes quelconques de même degré sur une courbe algébrique est toujours nulle, cette courbe est nécessairement une courbe cyclique de direction, n'ayant à l'infini que des cycles dont la classe surpasse l'ordre.

EXEMPLES.

57. Il est intéressant de former directement l'équation de quelques-unes de ces courbes remarquables : la propriété précédente permet toujours de reconnaître facilement si une courbe donnée rentre ou non dans la catégorie qui nous occupe ; mais elle ne se prête pas simplement

à former l'équation ponctuelle ou tangentielle générale de toutes les courbes de cette catégorie.

Les plus simples de ces courbes ne peuvent être que du quatrième degré au plus. Si, d'ailleurs, il existait une courbe cyclique de direction de ce degré, on obtiendrait, en la transformant par rayons vecteurs réciproques à partir de l'un de ses points, une courbe de direction du troisième degré passant par les points cycliques, courbe que nous savons ne pas exister.

Ce n'est donc pas avant le sixième degré que nous devons chercher une courbe jouissant des propriétés indiquées.

58. Prenons la transformée par rayons vecteurs réciproques, à partir de l'origine, de la courbe de direction du troisième ordre

$$\rho^3 \cos 3\omega = a^3,$$

nous trouvons

$$\rho^3 = a^3 \cos 3\omega,$$

c'est-à-dire

$$(x^2 + y^2)^3 = a^3 z^3 (x^3 - 3xy^2).$$

Soit C cette courbe du sixième degré, qui est évidemment une courbe cyclique de direction; pour l'étudier aux points I et J, posons

$$X = x + yi,$$
$$Y = x - yi.$$

Son équation devient

$$X^3 Y^3 = \frac{a^3}{2} z^3 (X^3 + Y^3).$$

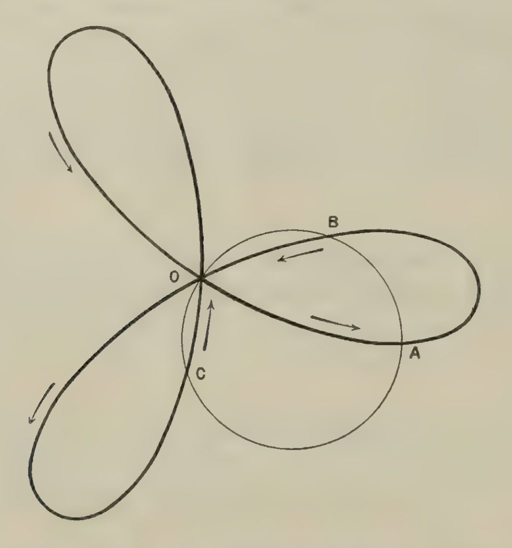
Sous cette forme, on voit que les trois tangentes aux points $X = 0$, $z = 0$, sont les droites

$$X^3 = \frac{a^3}{2} z^3$$

qui sont distinctes; une quelconque de ces droites coupe la courbe en six points confondus aux points $X = 0$, $z = 0$; elle a donc un contact du troisième ordre avec la branche qu'elle touche.

Il en résulte que l'arc de la courbe C est exprimable par une intégrale abélienne de première espèce appartenant à la courbe.

Cette courbe a la forme indiquée ci-dessous. Un cercle la coupe aux points cycliques et en six points à distance finie; ces six points coïn-



cident avec l'origine, si le cercle considéré est le cercle de rayon nul ayant l'origine pour centre.

On déduit de là, en particulier, la propriété suivante :

Un cercle passant par le point triple réel O *coupe la courbe en trois autres points à distance finie* A, B, C. *Le plus grand des arcs* OA, OB, OC, *sur la courbe* C, *est égal à la somme des deux autres.*

Cette propriété permet aisément, si l'on suppose la courbe tracée, de porter sur cette courbe, à partir d'un point donné, un arc égal à la somme ou à la différence de deux arcs donnés sur la courbe par leurs extrémités.

Remarque. — La courbe C est de genre un, puisqu'elle est la transformée par inversion d'une courbe de ce genre; les coordonnées de ses points sont donc des fonctions doublement périodiques d'un

paramètre u, et l'arc doit être proportionnel à ce paramètre. On peut le vérifier aisément en partant des expressions données au n° **46**.

M. W. Roberts avait déjà observé que l'arc de cette courbe s'exprime par une intégrale elliptique de première espèce (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XII), mais sans remarquer que cette intégrale appartient à la courbe.

59. On prouverait de la même manière que les courbes dont l'équation polaire est, en désignant par n un entier supérieur à zéro,

$$\rho^{2n+1} = a^{2n+1}\cos(2n+1)\omega \qquad (n \geqq 1)$$

sont des courbes cycliques de direction, jouissant de la propriété que la somme de leurs arcs compris entre deux courbes quelconques de même degré est toujours nulle.

En premier lieu, ce sont bien des courbes de direction, car on a

$$ds = \frac{d\omega}{\rho^{2n}} a^{2n+1},$$

ou, si $f(\xi, \eta) = 0$ est l'équation de la courbe,

$$ds = \frac{\xi\, d\eta - \eta\, d\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{n+1}} a^{2n+1},$$

expression qui est bien une différentielle abélienne appartenant à la courbe.

Ce sont ensuite des courbes cycliques; car leur équation, en posant toujours

$$X = x + yi, \qquad Y = x - yi,$$

peut s'écrire

$$X^{2n+1}Y^{2n+1} = \tfrac{1}{2}a^{2n+1}(X^{2n+1} + Y^{2n+1})z^{2n+1},$$

et l'on voit de plus que les tangentes au point $X = 0$, $z = 0$ sont distinctes et ont avec la branche de courbe qu'elles touchent un contact d'ordre $2n+1$. Par conséquent, si n est au moins égal à 1, la proposition est démontrée.

Ces courbes intéressantes ont été étudiées par de nombreux géomètres, parmi lesquels on doit citer notamment Maclaurin, Euler, L'Hôpital, Fagnano, Riccati, Lamé, Serret; MM. O. Bonnet, Halphen, Haton de la Goupillière, W. Roberts et Fouret; la propriété qu'on vient d'établir nous paraît compléter utilement les propositions qu'on a données sur leurs arcs.

60. Les beaux travaux de M. Halphen sur ces courbes vont nous permettre d'étendre ces considérations.

Soit la courbe cyclique

$$\rho^k = \cos k\omega,$$

où l'on a $k = \frac{q}{s}$, q et s étant deux nombres positifs premiers entre eux. Elle sera de direction si sa polaire réciproque par rapport à un cercle de rayon un, concentrique à l'origine, est ce que M. Halphen nomme *une courbe de première catégorie*, c'est-à-dire, comme l'a fait voir ce géomètre, si le dénominateur de la fraction irréductible $\frac{1}{\frac{1}{k}+1}$ ou $\frac{s}{s+q}$ est pair. En d'autres termes, la courbe sera de direction si q et s sont impairs.

L'ordre des cycles à l'infini, aux points I et J, est, comme on le voit très facilement en appliquant les méthodes de M. Halphen, égal à s; la classe est égale à q. Donc, si $q > s$, l'arc de la courbe s'exprimera par une intégrale abélienne de première espèce, appartenant à la courbe.

Par suite :

L'arc de toute courbe représentée en coordonnées polaires par une équation de la forme

$$\rho^{\frac{2p+1}{2q+1}} = A \cos \frac{2p+1}{2q+1}\,\omega,$$

où p et q sont deux entiers non négatifs, tels que la fraction $\frac{2p+1}{2q+1}$ soit irréductible, s'exprime par une intégrale abélienne de première espèce appartenant à la courbe, si p est plus grand que q.

Ces courbes jouissent donc de la propriété fondamentale signalée aux nos **55** et **56**.

61. Nous allons maintenant indiquer une classe très générale de courbes de cette nature, en nous appuyant sur le caractère géométrique qu'elles doivent présenter aux points I et J.

Soit une courbe quelconque de direction, ne passant par aucun des points cycliques; appelons O un point du plan extérieur à S.

La transformée de S par rayons vecteurs réciproques à partir de O est une courbe cyclique de direction S'; cherchons quelles sont ses tangentes aux points I et J.

Soit m un point commun à S et à la droite OJ; le point transformé de m sera le point J, et la tangente en J à la branche correspondante sera la droite transformée de la droite Im : ce résultat est connu par la théorie générale de l'inversion. Pour que cette tangente à S' en J ait avec la branche correspondante un contact du second ordre au moins, il faut et il suffit que la droite Im ait en m, avec la courbe S, un contact du premier ordre au moins.

La courbe S' n'aura donc, à l'infini, que des tangentes inflexionnelles si, en tous les points supposés simples des droites IO et JO, les tangentes à S passent respectivement par les points J et I.

Si cette condition est remplie, on aura, en posant $X = x + iy$, $Y = x - iy$ et en désignant par $f(X, Y, z) = 0$ l'équation de S,

$$f'_X = X\varphi_1, \qquad f'_Y = Y\varphi_2,$$

et, réciproquement, si f'_X et f'_Y sont divisibles respectivement par X et Y, la condition sera remplie.

Or, pour que la courbe $F(x, y, z) = 0$ soit de direction, il *suffit* qu'on ait identiquement

$$F'^2_x + F'^2_y = \psi^2(x, y, z)$$

si l'on pose

$$X = x + yi, \qquad Y = x - yi,$$

et si $F(x, y, z)$ devient, par cette substitution, $f(X, Y, z)$, on aura

$$4f'_X f'_Y = \psi^2(X, Y, z).$$

On aura donc une courbe de direction S, de l'espèce cherchée, en posant

$$f'_X = X^2 \varphi^2(X),$$
$$f'_Y = Y^2 \varphi^2(Y),$$

$\varphi(X)$ étant une fonction entière de X. La même fonction doit figurer dans f'_Y pour que la courbe $F(x, y, z)$ soit réelle.

On a ainsi, pour équation de S,

$$0 = S = \int_0^X X^2 \varphi^2(X)\, dX + \int_0^Y Y^2 \varphi^2(Y)\, dY + A,$$

A étant une constante différente de zéro, et la courbe S′ sera la transformée par rayons vecteurs réciproques de S à partir de l'origine.

Soit posé

$$X^2 \varphi^2(X) = aX^2 + bX^3 + cX^4 + \ldots + lX^{2\nu},$$

on aura

$$S = \frac{a}{3}(X^3 + Y^3) + \frac{b}{4}(X^4 + Y^4) + \ldots + \frac{l}{2\nu + 1}(X^{2\nu+1} + Y^{2\nu+1}) + A$$

ou en coordonnées polaires, en posant $\xi = \rho \cos\omega$, $\eta = \rho \sin\omega$, d'où

$$X = \rho(\cos\omega + i \sin\omega), \qquad Y = \rho(\cos\omega - i \sin\omega),$$

il viendra

$$S = \frac{a}{3}\rho^3 \cos 3\omega + \frac{b}{4}\rho^4 \cos 4\omega + \ldots + \frac{l}{2\nu + 1}\rho^{2\nu+1} \cos(2\nu + 1)\omega + A.$$

On peut mettre l'équation de la courbe sous la forme définitive

$$(S) \quad \alpha\rho^3 \cos 3\omega + \beta\rho^4 \cos 4\omega + \ldots + \lambda\rho^{2\nu+1} \cos(2\nu + 1)\omega = \mu.$$

$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont des constantes, telles que la dérivée, par rapport à ρ, de la fonction

$$\alpha\rho^3 + \beta\rho^4 + \ldots + \lambda\rho^{2\nu+1}$$

soit le carré parfait d'un polynôme entier en ρ.

La transformée de S par rayons vecteurs réciproques à partir de l'origine a une équation de la forme

$$(S') \quad \alpha\rho^{2\nu-2}\cos 3\omega + \beta\rho^{2\nu-3}\cos 4\omega + \ldots + \lambda\cos(2\nu+1)\omega = \mu\rho^{2\nu+1},$$

et son arc est exprimable par une intégrale abélienne de première espèce si la dérivée, par rapport au paramètre, de la fonction

$$\alpha\theta^3 + \beta\theta^4 + \ldots + \lambda\theta^{2\nu+1}$$

est le carré d'un polynôme entier en θ.

On obtient ainsi une classe étendue de courbes satisfaisant à la condition proposée; en particulier, si l'on suppose tous les coefficients α, β, ... nuls, sauf λ, on trouve les courbes $\rho^{2\nu+1} = A\cos(2\nu+1)\omega$, déjà rencontrées.

INTERSECTION D'UNE COURBE DE DIRECTION QUELCONQUE ET DE DEUX COURBES ALGÉBRIQUES.

62. Revenons maintenant au problème général de l'évaluation de la somme des arcs interceptés par deux courbes de même degré sur une courbe de direction quelconque; nous trouverons encore des résultats simples dans le cas où la courbe considérée n'a, à l'infini, que des points simples ou des points multiples à branches distinctes, et si elle ne touche pas la droite de l'infini.

Soit β l'argument d'un point à l'infini sur cette courbe $f = 0$, de degré n : par hypothèse, β est un zéro simple de $z(t)$.

On a toujours

$$\Theta(t) = \frac{\psi}{f'_y}\,\frac{x'z - xz'}{z^2\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}.$$

Pour trouver le résidu r_β, écrivons

$$\Theta(t) = \frac{\psi}{f'_y\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}\,\frac{d}{dt}\,\frac{x}{z}.$$

Posons $t - \beta = \tau$; on a, en désignant par x_0, x'_0, ... les valeurs de x, x'_1, ... pour $\tau = 0$,

$$\frac{x}{z} = \frac{x_0 + \tau x'_0 + \ldots}{z'_0 \tau + \ldots} = \frac{x_0}{z'_0 \tau} + \lambda + \mu\tau + \ldots,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{x}{z} = -\frac{x_0}{z'_0 \tau^2} + \mu + \ldots.$$

Le coefficient de $\frac{1}{\tau}$ dans le développement de $\Theta(t)$ sera donc égal à $-\frac{x_0}{z'_0}$, multiplié par la valeur de la dérivée par rapport à t de la fonction $\frac{\psi}{f'_y\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}$, pour $\tau = 0$: cette fonction ne s'annule pas, en effet, pour $\tau = 0$, si le point considéré n'est pas un des points cycliques du plan.

On a ainsi

$$r_\beta = \frac{-x_0}{z'_0}\frac{1}{\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)_0}\left(\frac{\psi}{f'_y}\right)'_0 + \frac{x_0}{z'_0}\left(\frac{\psi}{f'_y}\right)_0 \frac{(F'\varphi - F\varphi')_0}{(F - u\varphi)_0^2}.$$

Je dis que le premier terme de r_β est nul pour $t = \beta$. On a, en effet,

$$\psi^2(t) = f'^2_x(t) + f'^2_y(t);$$

d'où

$$\frac{\psi^2}{f'^2_y} = 1 + \frac{f'^2_x}{f'^2_y},$$

et je dis que la dérivée de $\frac{\psi}{f'_y}$, par rapport à t, s'annule pour $t = \beta$.

On peut toujours supposer que les axes de coordonnées ne sont parallèles à aucune des asymptotes de la courbe $f = 0$; le rapport $\frac{f'_x}{f'_y}$ reste donc fini pour $t = \beta$. Pour montrer que la dérivée de $\frac{\psi}{f'_y}$ s'annule pour cette valeur, il suffit donc, en vertu de la relation précédente, de faire voir que la dérivée de $\frac{f'_x}{f'_y}$ s'annule.

Or on a

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{yz' - y'z}{zx' - z'x}$$

et

$$\frac{d}{dt}\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{z\Delta}{(zx' - z'x)^2}, \qquad \text{étant posé} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Si l'on fait, dans cette relation, $t = \beta$, il vient, puisque $z(\beta) = 0$, et que, par suite de l'hypothèse, $z'(\beta)$ n'est pas nul, $\frac{d}{dt}\frac{f'_x}{f'_y} = 0$, et l'on a, par conséquent,

$$r_\beta = \left[\frac{x\psi}{z'f'_y}\frac{F'\varphi - F\varphi'}{(F - u\varphi)^2}\right]_\beta;$$

F' et φ' désignent les dérivées de F et φ par rapport à t.

Or on a

$$F' = F'_x x' + F'_y y' + F'_z z', \qquad \varphi' = \varphi'_x x' + \varphi'_y y' + \varphi'_z z';$$
$$mF = F'_x x + F'_y y + F'_z z, \qquad m\varphi = \varphi'_x x + \varphi'_y y + \varphi'_z z,$$

m étant le degré des courbes $F = 0$, $\varphi = 0$. On tire de là

$$m(F'\varphi - F\varphi') = (xy' - yx')(\varphi'_x F'_y - \varphi'_y F'_x) + \ldots,$$

et, à cause des relations $xf'_x + yf'_y + zf'_z = 0$; $x'f'_x + y'f'_y + z'f'_z = 0$, il vient

$$m(F'\varphi - F\varphi')\frac{f'_y}{zx' - z'x} = f'_z(\varphi'_x F'_y - F'_x\varphi'_y) + \ldots = J,$$

en désignant par J la jacobienne des trois fonctions f, φ et F.

On tire de là

$$r_\beta = -\left[\frac{x^2\psi J}{m f'^2_y (F - u\varphi)^2}\right]_\beta.$$

Le second membre est une fonction de $\frac{y}{x}$, c'est-à-dire de la direction du point à l'infini considéré; les dérivées de la fonction f, par rapport

à x, y et z, n'y figurent que par leurs rapports, car ψ est de la forme $f'_y\sqrt{1+\frac{f'^2_x}{f'^2_y}}$, et J de la forme $Af'_x + Bf'_y + Cf'_z$.

Il en résulte que la valeur de r_β ne change pas si l'on remplace f par une autre courbe passant par le point à l'infini considéré et ayant même tangente en ce point; par conséquent, Σr_β ne change pas si l'on remplace la courbe $f=0$ par le système de ses asymptotes. Donc on peut énoncer ce théorème :

V. *Soit C une courbe de direction ne passant pas par les points cycliques, n'ayant à l'infini que des points simples ou des points multiples à branches distinctes, et ne touchant pas la droite de l'infini; la somme des arcs interceptés sur C par deux courbes quelconques de même degré est égale à la somme des segments que ces courbes interceptent sur les asymptotes de C.*

On peut citer comme exemple de ce genre de courbes celles qui ont pour équation

$$\rho^{2n+1}\cos(2n+1)\omega = a^{2n+1},$$

où n est un entier non négatif.

En combinant ce résultat et celui des nos **53**, **54**, on arrive à la proposition générale suivante :

VI. *Soit C une courbe de direction n'ayant à l'infini que des points simples ou des points multiples à branches distinctes, ne touchant pas la droite de l'infini et admettant comme point multiple d'ordre μ chacun des deux points cycliques; la somme des arcs interceptés sur C par deux courbes quelconques de même degré est égale à la somme des arcs que ces courbes interceptent sur les asymptotes non isotropes de C et sur les cercles qui osculent respectivement à l'infini les branches cycliques de cette courbe* [1].

---

[1] Dans ces énoncés, on suppose toujours que les courbes sécantes ne passent simultanément par aucun des points à l'infini de la courbe de direction.

63. Nous terminerons ce Mémoire en énonçant quelques propositions qui sont relatives aux centres de gravité des arcs interceptés sur certaines courbes de direction par des courbes de même degré, et qui se démontrent sans difficulté en appliquant la formule fondamentale aux intégrales $\int \frac{x}{z}\, ds$ et $\int \frac{y}{z}\, ds$.

I. *Les arcs interceptés sur une courbe de direction par deux courbes de même degré, osculatrices entre elles en tous leurs points à l'infini, ont une somme algébrique nulle; de plus, le centre de gravité des arcs comptés positivement dans cette somme coïncide avec le centre de gravité des arcs comptés négativement.*

II. *Les arcs interceptés sur une courbe cyclique de direction par deux courbes ayant les mêmes asymptotes ont une somme algébrique nulle, et le centre de gravité des arcs positifs coïncide avec celui des arcs négatifs.*

On suppose dans ces énoncés que la courbe de direction n'a avec les courbes sécantes aucune direction asymptotique commune.

Comme application du dernier théorème, on a une propriété simple des centres de gravité des arcs d'un cercle compris entre deux coniques ayant mêmes asymptotes.

III. *Les arcs interceptés sur une courbe de direction par deux courbes* quelconques *de même degré ont une somme algébrique nulle, et le centre de gravité des arcs positifs coïncide avec celui des arcs négatifs, si la courbe de direction considérée est une courbe cyclique, n'ayant à l'infini que des cycles dont la classe surpasse le triple de l'ordre.*

Exemple. — La courbe de direction est une des courbes

$$\rho^{\frac{2p+1}{2q+1}} = A \cos \frac{2p+1}{2q+1}\,\omega,$$

p et q étant deux nombres entiers, non négatifs, tels que la fraction

$\frac{2p+1}{2q+1}$ soit irréductible, et que p soit supérieur à $3q+1$. En particulier, on aura dans cette classe les courbes

$$\rho^{2p+1} = a^{2p+1} \cos^{2p+1} \omega,$$

p étant un entier au moins égal à 2.

Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique;

Par M. H. POINCARÉ.

I. — Notations et définitions.

Dans le Mémoire qui va suivre, et qui a pour objet l'étude arithmétique des fonctions fuchsiennes, nous ferons usage d'un système abrégé de notations qui a déjà été assez souvent employé.

Nous désignerons une substitution linéaire quelconque par une seule lettre.

Ainsi soit

$$F(x, y, z)$$

une forme homogène en x, y et z.

Considérons une substitution linéaire portant sur ces trois variables et définie par le système de neuf coefficients

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons par exemple cette substitution par la lettre S.

Alors la notation

$$F.S$$

désignera la forme

$$F(a_1 x + b_1 y + c_1 z,\ a_2 x + b_2 y + c_2 z,\ a_3 x + b_3 y + c_3 z).$$

Comme F.S sera aussi une forme homogène en x, y, z, nous pourrons lui appliquer une autre substitution linéaire

$$S' = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a'_3 & b'_3 & c'_3 \end{vmatrix}.$$

Nous obtiendrons ainsi la forme

$$F\begin{bmatrix} a_1(a'_1x + b'_1y + c'_1z) + b_1(a'_2x + b'_2y + c'_2z) + c_1(a'_3x + b'_3y + c'_3z) \\ a_2(a'_1x + b'_1y + c'_1z) + b_2(a'_2x + b'_2y + c'_2z) + c_2(a'_3x + b'_3y + c'_3z) \\ a_3(a'_1x + b'_1y + c'_1z) + b_3(a'_2x + b'_2y + c'_2z) + c_3(a'_3x + b'_3y + c'_3z) \end{bmatrix},$$

que nous désignerons par la notation

$$(F.S)S',$$

ou plus simplement

$$F.S.S'.$$

Cela définit en même temps la substitution SS′ et montre que l'on a

$$F(SS') = (FS)S'.$$

Nous allons considérer en particulier la forme quadratique

$$\Phi = Y^2 - XZ,$$

dépendant des trois variables indépendantes X, Y et Z et les transformées de cette forme quadratique par diverses substitutions linéaires S. Il est aisé de trouver toutes les substitutions linéaires S qui n'altèrent pas Φ, c'est-à-dire qui sont telles que

$$\Phi.S = \Phi.$$

Mais il convient d'abord de distinguer ces substitutions en deux sortes.

Une transformation qui n'altère pas une forme quadratique peut

s'écrire

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Formons l'équation en S, du troisième degré

$$\begin{vmatrix} a_1 - S & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - S & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - S \end{vmatrix} = 0.$$

cette équation aura une racine égale à $+1$, ou une racine égale à -1. Dans le premier cas, la transformation sera dite droite ; dans le second cas, elle sera gauche.

Dans ce qui va suivre nous ne nous occuperons que des transformations droites, de déterminant $+1$. Il est aisé de voir alors que les substitutions semblables droites de la forme Φ peuvent s'écrire

$$S = \begin{vmatrix} \delta^2 & -\delta\gamma & \gamma^2 \\ -2\delta\beta & \alpha\delta + \beta\gamma & -2\alpha\gamma \\ \beta^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 \end{vmatrix},$$

où α, β, γ, δ sont quatre quantités quelconques telles que

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^6 = 1.$$

Nous n'envisagerons que les substitutions à coefficients réels ; nous supposerons donc que α, β, γ, δ sont réels, de sorte qu'on devra avoir

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

Nous rejetterons également les substitutions de déterminant -1, de sorte qu'on aura enfin

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Nous avons appelé *substitutions fuchsiennes* les substitutions de la

forme

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

où α, β, γ, δ sont des quantités réelles telles que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

On voit ainsi qu'à la substitution S correspondra une substitution fuchsienne

$$s = \left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right).$$

Si S et S' sont deux transformations linéaires qui n'altèrent pas Φ, et que s et s' soient les substitutions fuchsiennes correspondantes, à la transformation SS' correspondra la substitution fuchsienne ss'.

A tout groupe discontinu de transformations n'altérant pas Φ correspondra un groupe fuchsien, et réciproquement.

Soit maintenant T une transformation linéaire de déterminant quelconque et qui altère Φ. Posons

$$F = \Phi . T.$$

La forme quadratique F sera inaltérée par certaines substitutions linéaires de déterminant 1, que nous appellerons, pour employer une expression consacrée par l'usage, *transformations semblables de* F.

A toute transformation semblable de F correspondra une transformation semblable de Φ.

Si en effet S est une transformation semblable de Φ, $T^{-1}ST$ sera une transformation semblable de F.

Ainsi à tout groupe discontinu de transformations semblables de F correspondra un groupe de transformations semblables de Φ, et par conséquent un groupe fuchsien; et réciproquement.

Supposons que F ait ses coefficients entiers; parmi les transformations semblables de F nous distinguerons celles dont les coefficients sont entiers. Elles forment un groupe discontinu qui a déjà attiré l'attention de nombreux arithméticiens désireux de parcourir la voie qu'a ouverte M. Hermite.

A ce groupe discontinu correspondra donc un groupe fuchsien et par conséquent un système de fonctions fuchsiennes. De pareilles fonctions fuchsiennes pourront s'appeler *fonctions fuchsiennes arithmétiques* (Cf. *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences,* t. X, p. 132 et 138, et *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* Note du 29 mars 1886).

Le but du présent travail est l'étude de ces fonctions fuchsiennes arithmétiques et de leurs applications à la théorie des nombres.

Je me propose en particulier d'établir que ces fonctions admettent un théorème qui peut être regardé comme la généralisation du théorème d'addition des fonctions elliptiques, ce qui ne paraît pas avoir lieu pour les fonctions fuchsiennes ordinaires.

Pour compléter ce système de définitions qui me seront nécessaires dans la suite, je vais rappeler ce qu'on doit entendre par *indice* d'un sous-groupe.

On peut trouver dans le groupe principal un certain nombre de substitutions

$$(1) \qquad S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n$$

telles que toute substitution du groupe principal puisse se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme

$$T_i S_k,$$

T_i étant une substitution du sous-groupe et S_k une substitution du système (1).

Le nombre des substitutions de ce système (qui peut d'ailleurs être infini) est l'indice du sous-groupe.

Le *groupe commun* à deux groupes G et G′ est le groupe formé de toutes les substitutions communes à G et à G′.

Deux groupes sont *commensurables* quand leur groupe commun est pour chacun d'eux un sous-groupe d'indice fini.

On définirait de même le groupe commun à trois groupes ou la commensurabilité de trois groupes.

Voici maintenant quelques propositions qu'on peut déduire immédiatement de ces définitions.

1° Soient G et G′ deux groupes quelconques, C leur groupe commun, soit g un sous-groupe d'indice fini de G; soit c le groupe commun à g et à G′; c sera un sous-groupe de C; je dis que ce sera un sous-groupe d'indice fini.

Soit n l'indice du sous-groupe g.

Soient

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n$$

n substitutions convenablement choisies dans le groupe G. Toute substitution de G pourra se mettre sous la forme

$$T_i S_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

T_i étant une substitution de g.

Nous pourrons toujours supposer que S_1 se réduit à la substitution identique

$$S_1 = 1.$$

Formons le tableau des substitutions de C, c'est-à-dire des substitutions communes à G et à G′. Nous pourrons les classer en n classes. Chacune d'elles peut, en effet, se mettre sous la forme $T_i S_k$ et K peut prendre n valeurs différentes. Il peut arriver toutefois qu'une ou plusieurs des classes ainsi définies ne contienne aucune substitution.

Soient

$$T_1, \quad T_2, \quad \ldots, \quad T_i, \quad \ldots, \quad \text{à l'infini},$$

les substitutions de la première classe qui correspond au cas de $k = 1$ et de

$$S_k = S_1 = 1.$$

Ce seront par définition les substitutions du sous-groupe c.

Nous pourrons supposer

$$T_1 = 1.$$

Soient maintenant

$$T'_1 S_2, \quad T'_2 S_2, \quad \ldots, \quad T'_i S_2, \quad \ldots$$

les substitutions de la seconde classe.

Je dis que toutes ces substitutions pourront se mettre sous la forme

$$T_i T'_1 S_2,$$

T_i étant une substitution de la première classe, c'est-à-dire du groupe c.

Je dis que l'on aura par exemple

$$T'_i S_2 = T_i T'_1 S_2,$$

T_i appartenant à c; cela revient à dire que

$$T'_i T'^{-1}_1$$

appartient à c. En effet, T'_i et T'_1 appartenant par hypothèse à g, il en est de même de $T'_i T'^{-1}_1$; de plus, $T'_i S_2$ et $T'_1 S_2$ appartenant à G', il en sera encore de même de

$$T'_i S_2 (T'_1 S_2)^{-1} = T'_i T'^{-1}_1.$$

Cette dernière substitution faisant partie à la fois de g et de G' fera partie du groupe commun c.

Ainsi le Tableau des substitutions du groupe C réparties en n classes pourra s'écrire

$$\begin{array}{lllll}
T_1, & T_2 & \ldots, & T_i & \ldots. \\
T'_1 S_2, & T_2 T'_1 S_2, & \ldots, & T_i T'_1 S_2, & \ldots, \\
T''_1 S_3, & T_2 T'_1 S_3, & \ldots, & T_i T''_1 S_3, & \ldots, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots. & \ldots\ldots\ldots & \ldots, \\
T^{(n)} S_n, & T_2 T_1^{(n)} S_n, & \ldots, & T_i T_1^{(n)} S_n, & \ldots,
\end{array}$$

quelques-unes des classes pouvant manquer.

Par conséquent l'indice de c par rapport à C est au plus égal à l'indice de g par rapport à G.

2° Si g et g' sont deux sous-groupes d'indice fini de G et de G', leur groupe commun sera un sous-groupe d'indice fini par rapport au groupe commun de G et de G'.

Cette proposition se déduit immédiatement de la précédente.

3° Si g et g' sont deux sous-groupes d'indice fini par rapport à un même groupe G, leur groupe commun sera encore un sous-groupe d'indice fini de G.

4° Si deux groupes G et G′ sont commensurables à un même troisième G″, ils seront commensurables entre eux, et les trois groupes seront encore commensurables entre eux.

Soient en effet C_1, C_2 et C_3 les groupes communs, respectivement à G′ et à G″, à G″ et à G, et enfin à G et à G′.

Soit enfin c le groupe commun aux trois groupes G, G′ et G″; c sera évidemment aussi le groupe commun à deux quelconques des trois groupes C_1, C_2 et C_3.

Par hypothèse, les indices de C_1 par rapport à G′ et à G″, et de C_2 par rapport à G et à G″, sont finis.

Je dis que c est un sous-groupe d'indice fini de G″; c'est en effet le groupe commun à C_1 et à C_2, sous-groupes d'indice fini de G″.

Je dis également que c est un sous-groupe d'indice fini de G′; en effet, c est le groupe commun à G′ et à C_2; C_2 est un sous-groupe d'indice fini de G″. Donc l'indice c par rapport au groupe commun à G′ et à G″, c'est-à-dire par rapport à C_1, est fini. Or l'indice de C_1 par rapport à G′ est lui-même fini. Donc l'indice de c par rapport à G′ est encore fini.

Rien ne distingue d'ailleurs G de G′. Donc l'indice de c par rapport aux trois groupes G, G′ et G″ est fini; donc les trois groupes sont commensurables entre eux. C. Q. F. D.

C_3 contenant c aura évidemment un indice fini par rapport à G et à G′; d'où il suit que ces deux derniers groupes sont aussi commensurables entre eux.

II. — Réduction des formes.

Dans mon Mémoire sur les groupes kleinéens (*Acta mathematica*, t. III, *fig.* 1, § 2), j'ai exposé la distinction entre les groupes proprement discontinus et les groupes improprement discontinus. On a vu qu'un groupe peut être proprement discontinu dans une région donnée de l'espace et improprement dans une autre région.

Ici nous envisageons des formes quadratiques ternaires qui ont six

coefficients : elles peuvent donc être regardées comme des ensembles à six dimensions (ou à cinq seulement si l'on suppose le discriminant donné). Les groupes que nous envisageons peuvent donc être proprement discontinus quand les six coefficients sont soumis à certaines inégalités, et ne plus l'être qu'improprement quand ces inégalités cessent d'être remplies. Par exemple, ils pourront l'être proprement en ce qui concerne les formes définies et improprement en ce qui concerne les formes indéfinies.

Considérons donc un groupe G formé de substitutions linéaires et proprement discontinu par rapport à toutes les formes quadratiques ternaires définies. Soient F et F' deux formes quadratiques ternaires définies; je dirai que ces deux formes sont équivalentes par rapport au groupe G quand on pourra passer de l'une à l'autre par une substitution de ce groupe. Parmi les formes équivalentes à F, il y en aura une que l'on regardera comme plus simple que toutes les autres et que l'on appellera la *réduite de* F.

Cette définition comporte évidemment un très grand arbitraire : on peut d'une infinité de manières trouver des inégalités telles que, parmi les formes équivalentes à F, il y en ait une et une seule qui y satisfasse (et cela quelle que soit F). Ce sont alors ces inégalités qui sont les conditions de réduction.

En d'autres termes, et pour employer un langage géométrique, considérons les six coefficients de notre forme quadratique comme les coordonnées d'un point dans l'espace à six dimensions. Cet espace sera divisé en deux régions, R correspondant aux formes définies et R' correspondant aux formes indéfinies. Notre groupe G sera proprement discontinu dans R, improprement dans R'. On pourra donc partager R en une infinité de régions partielles r_1, r_2, ..., *ad inf.*; de telle façon que les substitutions de G changent ces régions partielles les unes dans les autres. Cette subdivision sera tout à fait analogue à ce qu'est dans la théorie des groupes fuchsiens la subdivision du plan, ou d'une partie du plan, en une infinité de polygones curvilignes. Alors les formes réduites, par rapport au groupe G, seront celles qui correspondent à des points intérieurs à la première région partielle r_1.

Cette définition de la réduction par rapport à un groupe G est une généralisation immédiate de celle de la réduction arithmétique. Dans

le cas de la réduction arithmétique, en effet, G n'est autre chose que le *groupe arithmétique*, qui est formé des substitutions linéaires à coefficients entiers et de déterminant 1. On peut prendre alors pour conditions de réduction, soit celles qui ont été adoptées par M. Selling, soit celles de MM. Korkine et Zolotareff. Mais on pourrait en imaginer une infinité d'autres.

Un autre cas particulier intéressant est celui où G est un sous-groupe d'indice fini du groupe arithmétique. Alors une substitution quelconque du groupe arithmétique pourra se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme

$$T_i S_k,$$

T_i étant une substitution de G et

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n$$

étant des substitutions du groupe arithmétique dont le nombre n est précisément l'indice du sous-groupe.

Si alors F est une forme définie quelconque, sa réduite arithmétique s'écrira

$$FT_i S_k,$$

et nous pourrons convenir, pour définir la réduction par rapport au groupe G, de dire que sa réduite par rapport à ce groupe sera FT_i.

Tout cela ne peut pas s'étendre au cas des formes indéfinies, car les groupes qu'il pourrait être intéressant de considérer, et en particulier le groupe arithmétique, sont improprement discontinus pour ces formes indéfinies, c'est-à-dire dans la région que nous avons appelée R'.

Mais tous les arithméticiens connaissent l'ingénieux artifice par lequel M. Hermite, introduisant les variables continues dans la théorie des nombres, a le premier triomphé de cette difficulté.

En même temps que la forme indéfinie

$$\Phi = Y^2 - XZ,$$

envisageons la forme

$$H = Y^2 + \frac{X^2}{2} + \frac{Z^2}{2}$$

qui est définie. Si T est une substitution linéaire et si HT est une forme définie réduite par rapport au groupe G, nous dirons que la substitution T est réduite par rapport à G et que la forme indéfinie ΦT est également réduite par rapport à G.

Voici maintenant comment on pourra trouver les réduites d'une forme indéfinie

$$F = \Phi\tau.$$

On aura aussi

$$F = \Phi S\tau.$$

S étant une quelconque des substitutions

$$\begin{vmatrix} \delta^2 & -\delta\gamma & \gamma^2 \\ -2\delta\beta & \alpha\delta+\beta\gamma & -2\alpha\gamma \\ \beta^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 \end{vmatrix},$$

où α, β, γ, δ sont quatre quantités réelles quelconques telles que :

Ce groupe des substitutions S, qui n'altèrent pas Φ, s'appellera *groupe reproductif de* Φ.

Considérons la forme définie $HS\tau$; il y aura toujours, d'après ce qui précède, dans le groupe G une substitution T qui réduira cette forme quadratique définie par rapport au groupe G. La forme $HS\tau T$ sera alors réduite. La substitution $S\tau T$ sera réduite, et la forme indéfinie

$$\Phi S\tau T = F_1 T$$

sera réduite. La substitution T sera alors l'une des substitutions réductrices de F. Comme il y a une infinité de substitutions S, la forme F admettra en général une infinité de substitutions réductrices.

Il peut se faire que deux substitutions réductrices T et T' conduisent à une même réduite, et qu'on ait

$$FT = FT'.$$

En ce cas, $T^{-1}T'$ est l'une des substitutions de G qui n'altèrent pas F.

Il peut donc arriver que le nombre des réduites soit fini, bien que

celui des substitutions réductrices soit infini. C'est ce qui se passe, par exemple, si F a ses coefficients entiers et si G est le groupe arithmétique.

Il en est encore de même si, les coefficients de F étant entiers, G est un sous-groupe d'indice fini du groupe arithmétique.

J'appellerai *groupe reproductif* de F le groupe des substitutions linéaires de déterminant $+1$ qui n'altèrent pas cette forme. Ce sera le transformé par la substitution τ du groupe reproductif de Φ, car toute substitution qui n'altère pas F peut se mettre sous la forme

$$\tau^{-1}S\tau,$$

S n'altérant pas Φ.

J'appellerai *sous-groupe inaltérant* de G par rapport à F le groupe commun à G et au groupe reproductif de F. Le transformé de ce sous-groupe par la substitution τ^{-1} sera le *groupe inaltérant transformé* relatif à G et à F. Ce sera un sous-groupe du groupe reproductif de Φ.

Nous avons vu au numéro précédent qu'à toute substitution du groupe reproductif de Φ correspond une substitution fuchsienne s. Donc au groupe inaltérant transformé relatif à G et à F correspondra un certain groupe fuchsien que j'appellerai *groupe fuchsien relatif à* G *et à* F.

Nous adopterons des dénominations spéciales, pour abréger le langage, dans le cas où G sera le groupe arithmétique. Le sous-groupe inaltérant s'appellera le *groupe principal de* F; le groupe inaltérant transformé s'appellera le *groupe transformé principal de* F; enfin le groupe fuchsien relatif à F et au groupe arithmétique s'appellera le *groupe fuchsien principal de* F.

Il résulte de là que, pour étudier le groupe principal de F, formé des substitutions semblables de F, il suffit d'étudier le groupe fuchsien principal de F.

Nous adopterons le mode suivant de représentation géométrique.

Nous considérerons un plan représentant la variable imaginaire z; nous ferons correspondre à la substitution S la substitution

$$s = \left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

que nous représenterons elle-même par le point du plan des z qui a pour affixe

$$\frac{\alpha\sqrt{-1}+\beta}{\gamma\sqrt{-1}+\delta}.$$

Ce point fait partie du dernier plan situé au-dessus de l'axe des quantités réelles. A chaque substitution S correspondra un point de ce demi-plan, mais à chaque point du demi-plan correspondront une infinité de substitutions S faisant partie du groupe reproductif de Φ.

Nous regarderons comme donnés le groupe G et la transformation τ qui change Φ en F.

Voici alors comment se représentera géométriquement la réduction de F par rapport à G :

A chaque substitution S et, par conséquent, à chaque forme quadratique définie H.S correspondra un point de notre demi-plan. Je dis maintenant qu'à chaque point de ce demi-plan, auquel correspondent pourtant une infinité de substitutions S, ne correspondra pourtant qu'une seule forme définie H.S.

Soient, en effet, S et S′ deux substitutions correspondant à un même point P de notre demi-plan. Je dis que

$$H.S = HS',$$

c'est-à-dire

$$H.SS'^{-1} = H.$$

En effet, les substitutions fuchsiennes s et s' qui correspondent respectivement à S et S′ changent toutes deux le point $\sqrt{-1}$ dans le point P. Donc la substitution ss'^{-1} n'altérera pas le point $\sqrt{-1}$.

On en conclura que les valeurs des quatre quantités α, β, γ, δ, qui correspondent à ss'^{-1}, ou ce qui revient au même à SS'^{-1}, sont

$$\alpha = \cos\varphi, \qquad \beta = \sin\varphi, \qquad \gamma = -\sin\varphi, \qquad \delta = \cos\varphi,$$

φ étant un angle quelconque ; d'où l'on déduira sans peine que la substi-

tution SS'^{-1} s'écrit

$$\begin{vmatrix} \cos^2\varphi & +\frac{1}{2}\sin^2\varphi & \sin^2\varphi \\ -\sin^2\varphi & \cos^2\varphi & \sin^2\varphi \\ \sin^2\varphi & -\frac{1}{2}\sin^2\varphi & \cos^2\varphi \end{vmatrix},$$

et, par conséquent, qu'elle n'altère pas H. C. Q. F. D.

A chaque point du demi-plan correspond donc une seule forme H.S, par conséquent une seule forme ΦS. Connaissant la forme définie $HS\tau$, on connaîtra la substitution réductrice T qui fait partie du groupe G et réduit $HS\tau$ par rapport à G.

A chaque point du demi-plan correspondra de la sorte une substitution réductrice et une seule. Nous pourrons donc subdiviser ce demi-plan en une infinité de régions, telles que, pour tous les points d'une même région, la substitution réductrice soit la même.

Ce mode de représentation géométrique est analogue, mais non identique à celui qu'a employé M. Selling.

Nous avons vu que, dans certains cas, bien qu'il y ait une infinité de substitutions réductrices, il n'y avait qu'un nombre fini de réduites. Qu'arrive-t-il alors? Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ nos n réduites. Nous avons subdivisé le plan en une infinité de régions qui correspondent aux différentes substitutions réductrices. Soient $r_{10}, r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1i}$ une infinité de ces régions correspondant à la réduite f_1, elles seront les transformées les unes des autres par les diverses substitutions du groupe fuchsien relatif à F et à G. Soient de même $r_{20}, r_{21}, \ldots, r_{2i}$ les régions qui correspondent à la réduite f_2, ... Soient enfin $r_{n0}, r_{n1}, \ldots$ les régions qui correspondent à la réduite f_n.

Nous pourrons toujours supposer qu'on a choisi les indices de telle sorte que $r_{2i}, \ldots, r_{ni}$ soient les transformées de $r_{20}, \ldots, r_{n0}$ par la même substitution qui change r_{10} en r_{1i}.

Cela posé, réunissons $r_{10}, r_{20}, \ldots, r_{n0}$ en une région unique R_0 et de même $r_{1i}, r_{2i}, \ldots, r_{ni}$ en une région unique R_i. Les diverses régions R_i seront les transformées les unes des autres par les diverses substitutions du groupe fuchsien relatif à F et à G.

Il serait aisé de ramener ces régions $R_0, \ldots, R_i, \ldots$ à des polygones

curvilignes, comme je l'ai expliqué dans le § V de mon Mémoire sur les groupes fuchsiens (*Acta math.*, t. I).

Avant de terminer ce paragraphe, je dois faire une dernière remarque. Nous avons regardé comme donnée la substitution τ qui change Φ en F. Il ne suffit pas, pour cela, de se donner F. En effet, cette forme peut dériver de Φ d'une infinité de manières : on a non seulement

$$F = \Phi\tau,$$

mais encore

$$F = \Phi . S . \tau,$$

S étant une substitution quelconque du groupe reproductif de Φ.

Il est clair, si l'on se reporte aux définitions qui précèdent, que le groupe fuchsien relatif à F et à G ne sera pas le même selon qu'on regardera F comme dérivée de Φ par la substitution τ ou par la substitution $S\tau$.

Quand cela sera nécessaire, afin d'éviter toute confusion, nous distinguerons ces deux cas en disant, dans le premier, le groupe fuchsien relatif à G et à $F = \Phi\tau$; dans le second, le groupe fuchsien relatif à G et à $F = \Phi S\tau$.

Le groupe fuchsien relatif à G et à $F = \Phi S\tau$ sera le transformé du groupe fuchsien relatif à G et $F = \Phi\tau$ par la substitution s^{-1}, s étant la substitution fuchsienne qui correspond à S, en vertu des conventions faites. En particulier, le groupe fuchsien principal de $F = \Phi S\tau$ sera le transformé du groupe fuchsien principal de $F = \Phi\tau$ par s^{-1}.

III. — Lemmes divers.

Lemme I. — *Si g est un sous-groupe d'indice fini de* G, *le groupe fuchsien relatif à g et à* F *sera un sous-groupe d'indice fini du groupe fuchsien relatif à* G *et à* F.

C'est une conséquence des lemmes démontrés à la fin du § I et des définitions du § II.

Lemme II. — *Si* G *et* G′ *sont deux groupes commensurables, les*

groupes fuchsiens de F *relatifs respectivement à* G *et à* G′ *sont aussi commensurables.*

Ce lemme est une conséquence immédiate du précédent et des définitions.

Lemme III. — *Soit* $F = \Phi\tau$; *soient ensuite* T′ *une substitution de* G *et* $F' = \Phi\tau T'$ *une forme équivalente à* F *par rapport au groupe* G. *Les deux formes* F *et* F′ *auront même groupe fuchsien relatif à* G.

En effet, le sous-groupe inaltérant g' de G par rapport à F′ sera le transformé par la substitution T′ du sous-groupe inaltérant g de G par rapport à F.

Si, en effet, U est une substitution du second sous-groupe g, de telle sorte que

$$F = FU,$$

on aura

$$F' = FT' = FUT' = F'T'^{-1}UT',$$

de telle façon que $T'^{-1}UT'$ appartiendra au premier sous-groupe g'.

Le groupe inaltérant transformé de F sera le transformé de g par τ^{-1}, ce sera donc

$$\tau g \tau^{-1}.$$

De même, le groupe inaltérant transformé de $F' = \Phi\tau T'$ sera

$$\tau T' g' T'^{-1} \tau^{-1}.$$

Mais nous venons de voir que

$$g' = T'^{-1} g T'.$$

Il vient donc

$$\tau T' g' T'^{-1} \tau^{-1} = T'^{-1} g T',$$

de sorte que les deux groupes inaltérants transformés se confondent.

Les deux groupes fuchsiens se confondront donc également.

C. Q. F. D.

En particulier, si G est le groupe arithmétique, le groupe fuchsien de $F = \Phi\tau$ par rapport à un groupe commensurable à G sera commensurable avec le groupe fuchsien principal de $F = \Phi\tau$.

Si T′ est une substitution à coefficients entiers, les deux formes équivalentes $F = \Phi\tau$ et $F' = \Phi\tau T'$ auront même groupe fuchsien principal.

Lemme IV. — *Si* G *et* G′ *sont deux groupes commensurables, et* S *une substitution de* G′, *une des puissances entières de* S (*d'exposant différent de* 0) *fera partie de* G.

Soit, en effet, g le groupe commun de G et G′; soit n l'indice du sous-groupe g par rapport à G′; cet indice est fini par hypothèse.

Si alors on prend au hasard $n+1$ substitutions dans G′ (parmi lesquelles on peut toujours supposer que l'on comprend la substitution identique 1), on pourra toujours trouver parmi elles deux substitutions S_i et S_k, telles que

$$S_i S_k^{-1}$$

appartienne à g et, par conséquent, à G.

Prenons, par exemple,

$$S^0 = 1, \qquad S, \quad S^2, \quad S^3, \quad \ldots, \quad S^n,$$

qui toutes font partie du groupe G′; soient alors

$$S_i = S^i, \qquad S_k = S^k.$$

Alors

$$S_i S_k^{-1} = S^{i-k}$$

fera partie de G. C. Q. F. D.

Nous allons étudier maintenant quelques-uns des sous-groupes du groupe arithmétique. Ce groupe est formé, d'après sa définition, de toutes les substitutions

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

dont les coefficients sont entiers, et le déterminant égal à 1.

Pour définir un sous-groupe du groupe arithmétique, il faut donc assujettir les coefficients entiers a, b, c à de nouvelles conditions.

Je distinguerai les *sous-groupes à congruences* où les neuf coefficients a, b, c sont assujettis à satisfaire à certaines congruences suivant un certain module q premier ou composé.

Lemme V. — *Un sous-groupe à congruences est toujours un sous-groupe d'indice fini du groupe arithmétique.*

Soit, en effet, g un sous-groupe défini par les k congruences

$$(1) \qquad P_1 \equiv P_2 \equiv \ldots \equiv P_k \equiv 0 \pmod{q},$$

où les P sont des polynômes entiers par rapport aux a, b, c.

Les congruences (1) devront être satisfaites si l'on fait

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 \equiv b_2 \equiv c_3 \equiv 1, \\ a_2 \equiv a_3 \equiv b_1 \equiv b_3 \equiv c_1 \equiv c_2 \equiv 0 \end{array} \right\} \pmod{q}.$$

et, en effet, la substitution identique

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

devra faire partie de g.

Le sous-groupe g' défini par les congruences (2) sera donc un sous-groupe du groupe g qui est lui-même un sous-groupe du groupe arithmétique.

Il est évident que g' sera un sous-groupe d'indice fini du groupe arithmétique; car cet indice sera certainement plus petit que q^9 (il se réduira à q^8 si q est premier), puisque chacun des neuf coefficients a, b, c peut prendre q valeurs incongrues par rapport au module q.

Donc *a fortiori* g sera un sous-groupe d'indice fini du groupe arithmétique. C. Q. F. D.

Considérons maintenant une transformation T' à coefficients entiers, mais dont le déterminant soit égal à un entier Δ plus grand que 1.

Soient G le groupe arithmétique, G' son transformé par T', g le groupe commun à G et à G'; je dis que g sera un sous-groupe à congruences.

Soit, en effet,

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

une substitution à coefficients entiers faisant partie de G.

Soit

$$T' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

la substitution définie plus haut.

La transformée de S par T' s'écrira

$$T'^{-1}ST' = \begin{vmatrix} \frac{P_1}{\Delta} & \frac{P_2}{\Delta} & \frac{P_3}{\Delta} \\ \frac{P_4}{\Delta} & \frac{P_5}{\Delta} & \frac{P_6}{\Delta} \\ \frac{P_7}{\Delta} & \frac{P_8}{\Delta} & \frac{P_9}{\Delta} \end{vmatrix},$$

les P étant des polynômes entiers homogènes et du premier degré par rapport aux a, b et c, et dont les coefficients dépendent des α, β et γ.

Pour que cette substitution fasse partie de g, il faut et il suffit que ses coefficients soient entiers, ce qui s'exprime par les neuf congruences

$$P_i \equiv 0 \pmod{\Delta}.$$

Cela montre que g est un sous-groupe à congruences; d'où l'on déduit aisément le lemme suivant :

Lemme VI. — *Le groupe arithmétique est commensurable avec son transformé par une substitution à coefficients entiers de déterminant plus grand que* 1.

Ou, ce qui revient au même,

Le groupe arithmétique est commensurable avec son transformé par une substitution à coefficients fractionnaires.

Soit maintenant T' une substitution à coefficients fractionnaires; je dirai que *la forme* F *est commensurable* avec sa transformée FT' par la substitution T'.

Lemme VII. — *Considérons deux formes commensurables* F *et* FT'; *le groupe fuchsien principal de* $F = \Phi\tau$ *sera commensurable avec le groupe fuchsien principal de* $FT' = \Phi\tau T'$.

En effet, le groupe arithmétique est commensurable avec le groupe G qui est son transformé par T'^{-1}.

Soit g le sous-groupe inaltérant de G par rapport à F; il sera commensurable avec le groupe principal de F.

D'autre part, le groupe principal de FT' sera le transformé de g par T'.

Le groupe transformé principal de $F = \Phi\tau$ sera le transformé par τ^{-1} du groupe principal de F; le groupe transformé principal de $FT' = \Phi\tau T'$ sera le transformé par $(\tau T')^{-1} = T'^{-1}\tau^{-1}$ du groupe principal de FT', et, par conséquent, le transformé par τ^{-1} du groupe g.

Or g et le groupe principal de F sont commensurables.

Donc les groupes transformés principaux de $F = \Phi\tau$ et de $FT' = \Phi\tau T'$ le sont également.

Donc les groupes fuchsiens principaux de $F = \Phi\tau$ et de $FT' = \Phi\tau T'$ sont commensurables. C. Q. F. D.

IV. — Substitutions fractionnaires.

On peut se proposer de rechercher quelles sont les substitutions à coefficients fractionnaires qui n'altèrent pas une forme F à coefficients entiers, ou, en d'autres termes, quelles sont les transformations semblables fractionnaires de F. Il est aisé de prévoir, d'ailleurs, que le groupe formé par ces transformations ne sera pas un groupe discontinu.

On voit aussi immédiatement que des substitutions semblables fractionnaires de F on pourra déduire les substitutions semblables fractionnaires d'une forme $F' = FT'$ commensurable avec F. En effet, les dernières seront les transformées des premières par la transformation T.

Soit donc à trouver les substitutions semblables fractionnaires de la forme

$$F = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy.$$

On a

$$\begin{aligned} A(AA' - B''^2)F = (AA' - B''^2)(Ax + B''y + B'z)^2 \\ + [(AA' - B''^2)y + (AB - B''B')z]^2 + A\Delta z^2. \end{aligned}$$

Δ désignant le discriminant de F, de telle sorte que la forme F est, à un facteur constant près, commensurable avec

$$F' = (AA' - B''^2)x^2 + y^2 + A\Delta z^2.$$

Nous sommes donc ramenés à étudier les substitutions semblables fractionnaires des formes telles que

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2,$$

ou plutôt, puisque nous avons affaire à une forme indéfinie, et si nous voulons mettre les signes en évidence

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2.$$

Nous allons d'abord nous poser le problème suivant :

Quelles sont les substitutions fractionnaires qui n'altèrent ni z ni $Ax^2 + By^2$?

Il faut alors trouver quatre nombres fractionnaires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, tels que

$$A(\alpha x + \beta y)^2 + B(\gamma x + \delta y)^2 = Ax^2 + By^2.$$

Nous mettrons les quatre nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sous la forme

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\varepsilon}, \qquad \beta = \frac{\beta_1}{\varepsilon}, \qquad \gamma = \frac{\gamma_1}{\varepsilon}, \qquad \delta = \frac{\delta_1}{\varepsilon};$$

α_1, β_1, γ_1, δ_1, ε étant entiers ou fractionnaires, nous pourrons toujours supposer que α_1, γ_1 et ε sont entiers : on aura alors

$$\begin{aligned} \alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 &= \varepsilon^2, \\ A\alpha_1^2 + B\gamma_1^2 &= A\varepsilon^2, \\ A\alpha_1\beta_1 + B\gamma_1\delta_1 &= 0, \\ A\beta_1^2 + B\delta_1^2 &= B\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Supposons que l'on ait trouvé trois entiers α_1, γ_1 et ε satisfaisant à

$$A\alpha_1^2 + B\gamma_1^2 = A\varepsilon^2,$$

il suffira de prendre

$$\beta_1 = -\frac{B\gamma_1}{A}, \qquad \delta_1 = \alpha_1$$

pour satisfaire aux trois autres équations.

Il reste donc à résoudre l'équation

$$B\gamma_1^2 = A(\varepsilon - \alpha_1)(\varepsilon + \alpha_1).$$

Nous multiplierons donc B par un carré quelconque γ_1^2, mais de telle façon que $B\gamma_1^2$ soit divisible par A, et de plus soit impair ou divisible par 4 (ainsi, si B est un multiple de $4 + 2$, γ_1 devra être pair; si $A = A_1 A_2^2$, A_1 n'étant divisible par aucun carré, γ_1 devra être divisible par $A_1 A_2$).

Il sera facile ensuite de décomposer $\frac{B\gamma_1^2}{A}$ en deux facteurs tous deux pairs ou tous deux impairs, $\varepsilon - \alpha_1$ et $\varepsilon + \alpha_1$, et d'en déduire, pour ε et α_1, deux valeurs entières.

Tel est donc le moyen de former les substitutions semblables fractionnaires de la forme binaire

$$Ax^2 + By^2.$$

Pour les étudier plus complètement, nous supposerons $A = 1$. Cette hypothèse est toujours permise; car, si l'on avait $A < 1$, on multiplierait la forme par A, et on changerait ensuite de variable en posant $Ax = x'$.

Considérons notre substitution fractionnaire

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{\varepsilon} & -\frac{B\gamma_1}{\varepsilon} \\ \frac{\gamma_1}{\varepsilon} & \frac{\alpha_1}{\varepsilon} \end{vmatrix},$$

et la substitution fuchsienne correspondante. Cette dernière sera évidemment une substitution elliptique qui n'altérera pas un certain point du plan. Ce point, que j'appelle P, se détermine aisément, et l'on trouve qu'il est le même pour toutes les substitutions fractionnaires de notre forme

$$x^2 + By^2.$$

Pour définir une substitution fuchsienne elliptique, il faut se donner non seulement le point P qui n'est pas altéré par cette substitution, mais encore l'angle de rotation φ.

Ici nous avons

$$\cos\varphi = \alpha = \frac{\alpha_1}{\varepsilon},$$

d'où l'on déduit

$$\sin\varphi = \frac{\gamma_1\sqrt{B}}{\varepsilon}.$$

Nous aurons alors

$$(\alpha_1 + \gamma_1\sqrt{-B})(\alpha_1 - \gamma_1\sqrt{-B}) = \varepsilon^2.$$

Nous devons supposer que α_1, γ_1 et ε sont premiers entre eux, et par conséquent que α_1 et γ_1 sont premiers entre eux. Les deux nombres complexes

$$\alpha_1 + \gamma_1\sqrt{-B} \quad \text{et} \quad \alpha_1 - \gamma_1\sqrt{-B}$$

seront alors aussi premiers entre eux, et l'on aura

$$\varepsilon = MN, \qquad \alpha_1 + \gamma_1\sqrt{-B} = M^2, \qquad \alpha_1 - \gamma_1\sqrt{-B} = N^2,$$

M et N étant deux nombres complexes existants ou idéaux, conjugués entre eux et de plus premiers entre eux.

Cela posé, cherchons d'abord si φ peut être commensurable avec 2π. Si cela était, on trouverait un nombre entier m, tel que

$$(\alpha_1 + \gamma_1\sqrt{-B})^m = \varepsilon^m$$

ou que

$$M^m = N^m;$$

M et N étant premiers entre eux, cette égalité est impossible. Il n'y aurait exception que si ε était égal à 1 et que $\alpha_1 + \gamma_1\sqrt{-B}$ fût une unité complexe.

Mais il faut faire attention au sens que l'on doit attacher à ce mot. Pour que la théorie des nombres complexes idéaux soit applicable, il faut prendre pour base du système $\sqrt{-B}$, si $+B$ (que d'ailleurs nous supposerons n'être divisible par aucun carré) est multiple de 4 plus 2 ou plus 1; il faut prendre, au contraire,

$$\frac{1+\sqrt{-B}}{2},$$

si B est multiple de 4 plus 3. Dans ce dernier cas,

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-B}}{2}$$

est considéré comme un entier complexe si $\alpha + \beta$ est pair (*voir* Dedekind, *Théorie des nombres entiers algébriques*, p. 91. Paris, Gauthier-Villars; 1877).

Alors on a, comme unités complexes,

$$\pm 1, \qquad \pm\sqrt{-1}, \qquad \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

On doit donc conclure de cette discussion que l'angle φ ne peut être commensurable avec 2π que s'il est égal à π, à $\pm\frac{\pi}{2}$, à $\pm\frac{\pi}{3}$ ou à $\pm\frac{2\pi}{3}$.

On voit, de plus, que les substitutions fractionnaires qui reproduisent à la fois les deux formes

$$z \quad \text{et} \quad x^2 + By^2$$

correspondent aux divers entiers complexes formés avec $\sqrt{-B}$, et que leur théorie dépend intimement de celle de ces nombres complexes et des idéaux correspondants.

Voilà donc une première catégorie de substitutions fractionnaires n'altérant pas la forme

$$x^2 + By^2 - Cz^2.$$

Une autre catégorie se composera des substitutions qui n'altèrent ni y, ni $x^2 - Cz^2$ (sans parler d'une autre catégorie qui sera formée de même des substitutions qui n'altèrent ni x, ni $By^2 - Cz^2$). Ces substitutions correspondront aux nombres complexes formés avec $\sqrt{C}$ comme celles de la première catégorie correspondaient aux nombres complexes formés avec $\sqrt{-B}$. Mais l'analogie de ces trois catégories de substitutions fractionnaires est trop évidente pour qu'il soit nécessaire d'insister.

Je dis maintenant que toute substitution fractionnaire peut toujours être ramenée à celles que nous venons d'étudier.

Soit, en effet,

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

une substitution fractionnaire quelconque qui n'altère pas une certaine forme quadratique F à coefficients entiers ou commensurables. Je supposerai, de plus, que cette substitution est droite au sens donné à ce mot dans le premier paragraphe de ce Mémoire.

On pourra trouver alors une forme linéaire

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z$$

à coefficients entiers, qui ne sera pas altérée par la substitution.

On pourra ensuite trouver encore deux formes linéaires

$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z,$$
$$\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z$$

à coefficients entiers, et telles que l'on puisse écrire

$$\begin{aligned}F = \quad & A_1(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)^2 \\ & + A_2(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z)^2 \\ & + A_3(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z)^2,\end{aligned}$$

A_1, A_2 et A_3 étant des quantités commensurables positives ou négatives.

Faisons maintenant un changement linéaire de variables en faisant

$$\begin{aligned}x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z,\end{aligned}$$

il viendra

$$F = A_1 x'^2 + A_2 y'^2 + A_3 z'^2,$$

de telle sorte que, si l'on appelle T la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

on aura

$$FT^{-1} = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2.$$

La substitution

$$TST^{-1}$$

sera fractionnaire et n'altérera pas FT^{-1}. Mais il y a plus, elle n'altérera pas z, ni par conséquent

$$A_1 x^2 + A_2 y^2.$$

Nous sommes donc ramenés au cas précédent.

Il conviendrait peut-être, pour compléter cette théorie, de dire quelques mots des substitutions fractionnaires gauches qui n'altèrent pas une forme quadratique. Mais je ne crois pas devoir m'y arrêter pour le moment. Je me bornerai à observer que, si S est une substi-

tution fractionnaire gauche n'altérant pas F, S^2 sera une substitution fractionnaire droite n'altérant pas non plus F.

V. — Calcul des multiplicateurs.

Soit

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

une substitution linéaire de déterminant 1, et

$$T^{-1}ST = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a'_3 & b'_3 & c'_3 \end{vmatrix}$$

sa transformée par une substitution linéaire quelconque T. On aura

$$a_1 + b_2 + c_3 = a'_1 + b'_2 + c'_3.$$

En d'autres termes, la somme $a_1 + b_2 + c_3$ sera un invariant. On pourra choisir la substitution T, de telle façon que $T^{-1}ST$ soit de la forme canonique

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}.$$

Alors λ_1, λ_2 et λ_3 seront les multiplicateurs de la substitution λ; ces multiplicateurs seront les racines de l'équation en λ,

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

et l'on aura

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_1 + b_2 + c_3.$$

Si, en particulier, S n'altère pas une forme quadratique et est une substitution droite, l'un des multiplicateurs est égal à 1, et le produit des deux autres est aussi égal à 1.

Soit alors

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

la substitution fuchsienne correspondant à S; $\alpha + \delta$ sera, pour cette substitution, un invariant comme $a_1 + b_2 + c_3$ l'était pour S, et l'on aura d'ailleurs

$$(\alpha + \delta)^2 = a_1 + b_2 + c_3 + 1.$$

Il résulte de là que la connaissance de $\alpha + \delta$ suffit pour déterminer les trois multiplicateurs, qui devront satisfaire à l'équation du troisième degré

$$\lambda^3 - 1 - [(\alpha + \delta)^2 - 1](\lambda^2 - \lambda) = 0.$$

Si S est une substitution à coefficients entiers, la somme $a_1 + b_2 + c_3$ devra être un entier, et par conséquent $\alpha + \delta$ devra être la racine carrée d'un entier.

La somme $\alpha + \delta$ s'appellera l'*invariant de la substitution* S et s'écrira, pour abréger, [S].

Nous allons traiter maintenant le problème suivant :

On se donne [A], [B] *et l'invariant* [AB] *de la combinaison* AB *des deux substitutions* A *et* B. *On demande de calculer l'invariant d'une combinaison quelconque de ces deux substitutions*

$$A^m B^n, \quad A^m B^n A^p, \quad A^m B^n A^p B^q, \quad \ldots,$$

m, n, p, q étant des entiers quelconques positifs ou négatifs.

Tout d'abord, il est évident que deux substitutions inverses l'une de l'autre auront même invariant; on aura

$$[A] = [A^{-1}], \qquad [B] = [B^{-1}], \qquad \ldots.$$

De plus, une substitution aura même invariant que sa transformée

par une substitution quelconque; ainsi,

$$[A] = [B^{-1}AB],$$
$$[A^m B^n A^p B^q] = [B^q A^m B^n A^p],$$

et, en particulier,

$$[BA] = [AB] = [A^{-1}B^{-1}] = [B^{-1}A^{-1}].$$

Je vais maintenant chercher une relation entre

$$[A], \quad [B], \quad [AB] \quad \text{et} \quad [AB^2].$$

Nous pouvons toujours, par une transformation convenable, mettre la substitution fuchsienne qui correspond à B sous la forme

$$\left[z, \frac{\lambda z}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)}\right].$$

Soit ensuite

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

la substitution fuchsienne correspondant à A. Alors

$$\left(z, \frac{\alpha\lambda z + \beta\lambda}{\frac{\gamma}{\lambda} z + \frac{\delta}{\lambda}}\right) \quad \text{et} \quad \left(z, \frac{\alpha\lambda^2 z + \beta\lambda^2}{\frac{\gamma}{\lambda^2} z + \frac{\delta}{\lambda^2}}\right)$$

seront les substitutions fuchsiennes correspondant respectivement à AB et à AB², de sorte qu'on aura

$$\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = [B], \qquad \alpha + \delta = [A],$$

$$\alpha\lambda + \frac{\delta}{\lambda} = [AB], \qquad \alpha\lambda^2 + \frac{\delta}{\lambda^2} = [AB^2].$$

On en tire aisément, par l'élimination de α, δ et λ,

$$[AB][B] = [A] + [AB^2].$$

Si, dans la formule précédente, on change A en AB^n, il vient

$$[AB^{n+2}] = [AB^{n+1}][B] - [AB^n].$$

C'est une formule de récurrence qui permet de calculer $[AB^n]$, où n est un entier quelconque positif ou négatif, quand on connaît $[A]$, $[B]$ et $[AB]$.

Aussi, connaissant $[A]$, $[B]$ et $[AB]$, nous pouvons en déduire $[AB^n]$, et par conséquent $[B^n A]$, puisque

$$[B^n A] = [AB^n].$$

Nous connaissons ainsi

$$[B^n A], \quad [B^n] \quad \text{et} \quad [A],$$

ce qui permet de calculer $[B^n A^m]$, où m et n sont des entiers quelconques, par la formule de récurrence

$$[B^n A^{m+2}] = [B^n A^{m+1}][A] - [B^n A^m].$$

Nous avons d'ailleurs

$$[B^n A^m] = [A^m B^n] = [A^{m-p} B^n A^p] = [B^p A^m B^{n-p}],$$

ce qui permet de calculer

$$[A^m B^n A^p] \quad \text{et} \quad [B^m A^n B^p],$$

où m, n, p sont des entiers quelconques.

Cherchons maintenant

$$[A^m B^n A^p B^q],$$

où les quatre exposants sont entiers. On voit d'abord que, par notre formule de récurrence, nous pourrons calculer cet invariant, quel que soit q, pourvu que nous connaissions, outre $[B]$,

$$[A^m B^n A^p] \quad \text{et} \quad [A^m B^n A^p B].$$

La première de ces deux expressions est connue d'après ce qui précède; il reste donc à calculer

$$[A^m B^n A^p B] = [BA^m B^n A^p].$$

On verrait de même que le calcul de

$$[BA^m B^n A^p]$$

se ramène à celui de

$$[BA^m B^n A] = [ABA^m B^n],$$

qui se ramène lui-même à celui de

$$[ABA^m B] = [BABA^m]$$

ou enfin à celui de

$$[BABA].$$

Or, ce dernier invariant est connu, puisque c'est celui de $(BA)^2$ et que nous connaissons celui de BA.

Ce qui précède suffit pour faire comprendre comment on calculerait l'invariant d'une combinaison quelconque des deux substitutions A et B.

Imaginons maintenant que A et B sont des substitutions à coefficients entiers et de déterminant 1. Il en sera de même de toutes leurs combinaisons. Alors, dans la formule

$$[AB^2] + [A] = [AB][B],$$

les deux termes du premier membre, ainsi que le terme unique du second membre, devront être la racine carrée d'un entier.

Mais il est aisé de voir que, si l'on a

$$\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\mu_3}$$

(les μ étant des entiers), les trois expressions

$$\sqrt{\mu_2\mu_3}, \quad \sqrt{\mu_3\mu_1}, \quad \sqrt{\mu_1\mu_2}$$

devront être des entiers.

Il suit de là que les produits

$$[A][AB^2], \quad [A][AB][B], \quad [AB^2][AB][B]$$

sont entiers.

Il est aisé d'en déduire que si $[A]$ est égal à un nombre commensurable multiplié par $\sqrt{\alpha}$, et $[B]$ égal à un nombre commensurable multiplié par $\sqrt{\beta}$, $[AB]$ devra être égal à un nombre commensurable multiplié par $\sqrt{\alpha\beta}$, et $[AB^2]$ à un nombre commensurable multiplié par $\sqrt{\alpha}$ ou, ce qui revient au même, à un nombre commensurable multiplié par $\sqrt{\alpha\beta^2}$.

Plus généralement, on aura

$$[A^m B^n A^p B^q] = \mu_1 \sqrt{\alpha^{m+p}\beta^{n+q}} = \mu_2 \sqrt{\alpha^h \beta^k},$$

μ_1 et μ_2 étant commensurables, et h et k étant égaux soit à 0, soit à 1, suivant la parité des deux nombres $m+p$ et $n+q$, et de telle sorte que

$$h \equiv m+p, \qquad k \equiv n+q \qquad (\text{mod } 2).$$

Cela peut s'énoncer encore d'une autre manière.

Considérons le groupe dérivé des deux substitutions linéaires A et B. Pour que toutes les substitutions de ce groupe aient leurs invariants égaux à la racine carrée d'un entier, il faut et il suffit que

$$[A]^2, \quad [B]^2 \quad \text{et} \quad [A][B][AB]$$

soient des entiers.

Nous allons maintenant envisager un groupe dérivé de trois substitutions linéaires A, B et C. Je dis que l'on peut, à l'aide de la relation de récurrence démontrée plus haut, calculer les invariants de toutes les substitutions de ce groupe, à l'aide de sept invariants

$$[A], \quad [B], \quad [C], \quad [AB], \quad [BC], \quad [CA], \quad [ABC].$$

Pour le démontrer, je rappelle d'abord que cette relation de récurrence permet (M, N, P étant des substitutions quelconques) de calculer

$$[MN^p]$$

(p entier positif ou négatif), quand on connaît

$$[M], \quad [N] \quad \text{et} \quad [MN],$$

ou plus généralement de calculer

$$[MN^p P]$$

quand on connaît

$$[MP], \quad [N] \quad \text{et} \quad [MNP].$$

Elle permet ainsi, connaissant [A], [B] et [AB], de calculer les invariants de toutes les combinaisons de A et de B, ou, à l'aide de nos sept invariants, de calculer ceux de toutes les combinaisons A, B et C, où l'une de ces trois substitutions n'entre pas.

Je dis qu'on pourra trouver de même

$$[A^m B^n C^p].$$

En effet, le calcul de cet invariant se ramène à celui de $[A^m B^n]$, qui est connu et à celui de $[A^m B^n C]$. Ce dernier se ramène à $[A^m C]$, qui est connu, et à $[A^m BC]$. Ce dernier, à son tour, se ramène à [BC] et à [ABC], qui sont tous deux supposés connus.

Considérons maintenant une combinaison quelconque

$$[A^m B^n C^p B^q A^r C^s B^t C^u].$$

On ramènera, par le même procédé, le calcul de cet invariant à celui de

$$[ABCBACBC],$$

où les lettres sont restées les mêmes et dans le même ordre, mais où tous les exposants sont réduits à l'unité.

Je dis maintenant qu'on peut ramener le calcul de cet invariant à celui de

$$[ABC(AB)CBC],$$

où deux des lettres sont permutées.

En effet, notre formule de récurrence permet de réduire le calcul de

$$[ABC(BA)CBC]$$

à celui de

$$[ABC.CBC]$$

(où le nombre des lettres est moindre, et que, par conséquent, on peut supposer préalablement calculé) et à celui de

$$[ABC(BA)^{-1}CBC] = [ABCA^{-1}B^{-1}CBC];$$

en réduisant les exposants à l'unité, ce dernier devient

$$[ABCABCBC].$$

Il est clair qu'en appliquant d'une façon convenable le double procédé qui permet de permuter deux lettres quelconques et de réduire les exposants à l'unité, on arrivera à réduire de plus en plus le nombre des lettres de telle façon qu'on sera ramené finalement à l'invariant connu [ABC].

On connaîtra donc ainsi l'invariant d'une substitution quelconque du groupe.

On peut en conclure ce qui suit :

Pour que toutes les substitutions du groupe aient pour invariant la racine carrée d'un entier (ce qui arrive nécessairement quand les substitutions A, B, C ont leurs coefficients entiers), il faut et il suffit que

$$[A]^2, \quad [B]^2, \quad [C]^2, \quad [A][B][AB], \quad [B][C][BC], \quad [C][A][CA]$$

et

$$[A][B][C][ABC]$$

soient des entiers.

Mais nos sept invariants eux-mêmes ne sont pas indépendants les uns des autres. Il y a entre eux une relation algébrique.

Cette relation se présente sous une forme plus symétrique, quand on considère, au lieu de nos sept invariants, les sept invariants suivants (ce

qui revient d'ailleurs au même)

$$|A| = \alpha, \quad |B| = \beta, \quad |C| = \beta', \quad |C^{-1}B^{-1}| = \beta'',$$
$$|BA| = \gamma, \quad |CA| = \gamma', \quad |C^{-1}B^{-1}A| = \gamma''.$$

J'ai représenté, pour abréger, les sept invariants par les lettres α, β, γ.

La relation s'écrit alors

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 - 4 \\ = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta'\gamma' + \alpha\beta''\gamma'' + \beta\gamma'\gamma'' + \beta'\gamma\gamma'' + \beta''\gamma\gamma' \\ - \alpha\beta\beta'\gamma'' - \alpha\beta\beta''\gamma' - \alpha\beta'\beta''\gamma + \alpha^2\beta\beta'\beta'' - \beta\beta'\beta''.\end{aligned}$$

On arrive à un résultat analogue dans le cas d'un groupe dérivé de quatre substitutions ou d'un plus grand nombre.

Soit un groupe dérivé de n substitutions

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n.$$

Pour que toutes les substitutions du groupe aient pour invariant la racine carrée d'un entier, il faut et il suffit que

$$|A_1|^2, \quad |A_2|^2, \quad \ldots, \quad |A_n|^2,$$

ainsi que toutes les combinaisons

$$|A_1^{\varepsilon_1}A_2^{\varepsilon_2}A_3^{\varepsilon_3}\ldots A_n^{\varepsilon_n}|\,|A_1|^{\varepsilon_1}|A_2|^{\varepsilon_2}\ldots|A_n|^{\varepsilon_n}$$

(où les exposants ε *sont égaux soit à* 0, *soit à* 1), *soient des entiers.*

VI. — Réduction des substitutions.

Voici la question que je me propose de traiter dans ce paragraphe.

Soit S une substitution à coefficients entiers et de déterminant 1; soit T une autre substitution à coefficients entiers et de déterminant 1;

je dirai que la substitution S et sa transformée

$$T^{-1}ST$$

sont homologues et appartiennent à la même classe.

Cela posé, parmi toutes les substitutions d'une même classe, il y en a une qui est plus simple que toutes les autres, et que j'appellerai *substitution réduite*.

On peut se proposer, étant donnée une substitution S, de trouver la substitution réduite qui appartient à la même classe, ou, en d'autres termes, de *réduire* la substitution S.

On voit d'abord tout de suite que deux substitutions homologues ont mêmes multiplicateurs. Je supposerai, comme je l'ai fait jusqu'ici, qu'un des multiplicateurs est égal à 1, ainsi que le produit des deux autres.

Il résulte de là qu'il existera une forme linéaire

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z,$$

à coefficients entiers et premiers entre eux, qui sera inaltérée par la substitution.

On peut alors former une substitution linéaire

$$T = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix}$$

à coefficients entiers et de déterminant 1.

La substitution $T^{-1}ST$, transformée de S par T, sera alors de la forme

$$S' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

ce qui constitue une première réduction.

Supposons d'abord que b_1 et c_1 soient nuls, et que la substitution S

s'écrive

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix}$$

avec la condition

$$ad - bc = 1.$$

Si l'on transforme alors S par une substitution T de la forme

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & \lambda' & \mu' \end{vmatrix}$$

à coefficients entiers et de déterminant 1, la substitution S conservera la même forme après cette transformation.

Envisageons la forme quadratique binaire

$$\psi = c\xi^2 + (d - a)\xi\eta - b\eta^2,$$

qui n'est pas altérée par la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Que deviendra cette forme lorsque l'on remplacera S par sa transformée

$$T^{-1}ST?$$

Tout se passera comme si l'on avait appliqué à cette forme la substitution

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix}.$$

D'où cette conclusion :

Pour que deux substitutions

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix}, \qquad S' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a' & b' \\ 0 & c' & d' \end{vmatrix}$$

appartiennent à la même classe, il faut et il suffit que les deux formes

$$c\xi^2 + (d-a)\xi\eta - b\eta^2$$

et

$$c'\xi^2 + (d'-a')\xi\eta - b'\eta^2$$

soient équivalentes.

Nous sommes donc conduits à dire par définition que la substitution S est réduite quand la forme ψ l'est elle-même.

La somme des multiplicateurs de S est

$$a + d + 1,$$

et son invariant

$$\sqrt{a + d + 2}.$$

La substitution est elliptique si

$$(a+d)^2 < 4, \qquad \text{d'où} \qquad (a+d) = 0, \qquad (a+d) = \pm 1,$$

parabolique si

$$(a+d)^2 = 4, \qquad \text{d'où} \qquad a+d = \pm 2,$$

hyperbolique si

$$(a+d)^2 > 4.$$

La forme 2ψ a pour discriminant

$$(d-a)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4.$$

Il résulte de là que le discriminant de ψ est fonction de l'invariant de S, et par conséquent que *les substitutions* S *d'invariant donné se répartissent en un nombre fini de classes.*

La substitution S sera elliptique si ψ est définie. Les conditions de réduction pourront alors s'écrire

$$|d-a| < |b| < |c|;$$

b et c seront d'ailleurs toujours de signe contraire.

La substitution S sera hyperbolique si ψ est indéfinie. Il arrive alors que chaque classe de substitutions contiendra plusieurs réduites, comme cela arrive pour les formes indéfinies.

Nous prendrons alors pour unique condition de réduction que b et c soient de même signe.

Enfin la substitution S sera parabolique si ψ se réduit à un carré parfait. Nous dirons alors que ψ est réduite si elle s'écrit $\psi = c\xi^2$, de telle sorte que les conditions de réduction de S s'expriment comme il suit :

$$b = 0, \qquad \text{d'où} \qquad a = d = \pm 1.$$

Énumérons maintenant les substitutions elliptiques réduites.

Pour $a + d = 0$, le discriminant de 2ψ est égal à -4, et celui de ψ à -1. Si ψ est une réduite, on a donc

$$\psi = \xi^2 + \eta^2.$$

La substitution réduite S s'écrit alors

$$S_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Pour $a + d = 1$, le discriminant de 2ψ est égal à -3, et cette forme 2ψ est improprement primitive. On a alors, si 2ψ est réduite,

$$\psi = \xi^2 + \xi\eta + \eta^2.$$

de sorte que l'on trouve pour S

$$S_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Pour $a + d = -1$, on trouve encore

$$\psi = \xi^2 + \xi\eta + \eta^2,$$

ce qui donne

$$S_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous classerons encore parmi les substitutions elliptiques la substitution suivante

$$S_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

pour laquelle la forme ψ, étant identiquement nulle, ne peut être regardée ni comme définie, ni comme indéfinie.

Il y aura donc en tout quatre classes de substitutions elliptiques.

Nous remarquerons que la substitution S_3 n'est autre chose que le carré de la substitution S_2.

Quant aux substitutions paraboliques réduites, elles s'écriront, soit

$$S_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix},$$

soit

$$S_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & c & -1 \end{vmatrix},$$

où c est un entier quelconque.

Ne supposons plus maintenant que b_1 et c_1 sont nuls et écrivons notre substitution S sous la forme suivante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a & b \\ c_1 & c & d \end{vmatrix},$$

avec la condition

$$ad - bc = 1.$$

On peut supposer que la réduction a été faite comme si b_1 et c_1 étaient nuls et par conséquent que l'on a

$$(1) \qquad |d - a| < |b| < |c|$$

ou

$$(2) \qquad d = a = -1, \qquad b = c = 0$$

si la substitution est elliptique;

$$(3) \qquad bc > 0$$

si elle est hyperbolique, et

$$(4) \qquad b = 0$$

si elle est parabolique.

Il s'agit maintenant de réduire autant que possible les coefficients b_1 et c_1.

Pour cela, écrivons les équations qui définissent la substitution S de la façon suivante :

$$x' = x,$$
$$y' = b_1 x + ay + bz,$$
$$z' = c_1 x + cy + dz.$$

Posons ensuite

$$y = y_1 + \alpha x, \qquad z = z_1 + \beta x;$$

d'où

$$y' = y'_1 + \alpha x', \qquad z = z'_1 + \beta x'.$$

Les deux dernières équations s'écriront alors

$$y'_1 = x[b_1 + (a-1)\alpha + b\beta] + ay_1 + bz_1,$$
$$z'_1 = x[c_1 + c\alpha + (d-1)\beta] + cy_1 + dz_1.$$

En d'autres termes, les coefficients de la substitution S n'ont pas changé par cette transformation, sauf que b_1 et c_1 sont devenus

$$b_1 + (a-1)\alpha + b\beta,$$
$$c_1 + c\alpha + (d-1)\beta.$$

Le problème consiste à déterminer les entiers α et β pour diminuer autant que possible b_1 et c_1. Je dirai que deux systèmes de nombres (b_1, c_1) et (b'_1, c'_1) appartiennent à une même classe si l'on peut trouver deux entiers α et β, tels que

$$b'_1 = b_1 + (a-1)\alpha + b\beta,$$
$$c'_1 = c_1 + c\alpha + (d-1)\beta.$$

Le nombre des classes entre lesquelles se répartissent les systèmes (b_1, c_1) est alors égal à

$$\begin{vmatrix} (a-1) & b \\ c & (d-1) \end{vmatrix} = |2 - a - d|.$$

Parmi les systèmes (b_1, c_1) appartenant à une même classe, il y en aura un que l'on regardera comme plus simple que les autres et que l'on appellera système réduit; le nombre des systèmes réduits est fini.

Alors, pour qu'une substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a & b \\ c_1 & c & d \end{vmatrix}$$

soit réduite, il faudra non seulement que les quatre entiers a, b, c, d satisfassent aux conditions (1), (2), (3) ou (4) énoncées plus haut, mais encore que le système (b_1, c_1) soit réduit.

Nous avons vu plus haut que, si b_1 et c_1 sont nuls, les substitutions S d'invariant donné se répartissent en un nombre fini de classes. D'après ce qui précède, cela est encore vrai si b_1 et c_1 ne sont pas nuls.

Revenons au cas des substitutions elliptiques et cherchons à déterminer les systèmes réduits (b_1, c_1). Il y a quatre cas à considérer, puisque les substitutions elliptiques, quand $b_1 = c_1 = 0$, se répartissent en quatre classes.

Premier cas :

$$a = d = 0, \qquad b = -1, \qquad c = 1;$$

$2 - a - d = 2$; il y a deux systèmes réduits

$$b_1 = c_1 = 0, \qquad b_1 = 1, \qquad c_1 = 0.$$

Deuxième cas :

$$a = 0, \qquad c = d = 1, \qquad b = -1;$$

$2 - a - d = 1$; il n'y a qu'un système réduit

$$b_1 = c_1 = 0.$$

Troisième cas :

$$a = b = -1, \qquad c = 1, \qquad d = 0;$$

$2 - a - d = 3$; il y a trois systèmes réduits

$$b_1 = 0, \qquad c_1 = 0, \qquad b_1 = 1, \qquad c_1 = 0, \qquad b_1 = 2, \qquad c_1 = 0.$$

Quatrième cas :

$$a = d = -1, \qquad b = c = 0;$$

$2 - a - d = 4$; il y a quatre systèmes réduits

$$b_1 = 0 \quad \text{ou} \quad 1, \qquad c_1 = 0 \quad \text{ou} \quad 1.$$

Mais, si nous observons qu'en appliquant à y et z une transformation linéaire, on fait subir cette même transformation à b_1 et c_1 sans changer d'ailleurs les autres coefficients de S; nous verrons que ces quatre systèmes peuvent être réduits à deux.

Il y a donc huit substitutions elliptiques réduites que je vais énumérer.

$$S_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad S'_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad S_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$S'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad S''_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -0 \end{vmatrix},$$

$$S_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad S'_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

On peut faire une classification analogue pour les substitutions paraboliques, mais le nombre des classes est infini; on doit envisager d'abord le cas où les trois multiplicateurs sont égaux à 1; on trouve alors que la substitution doit être de la forme

$$S'_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{vmatrix}.$$

Les transformations qu'on peut faire ne peuvent changer la valeur de a et de c. La seule réduction possible, c'est d'amener b à être plus petit que le plus grand commun diviseur de a et de c (et par conséquent à être nul, si a et c sont premiers entre eux); on peut également supposer que c n'est pas nul.

On considérera ensuite le cas où deux des multiplicateurs sont égaux à -1; on a alors

$$a = d = 1, \qquad 2 - a - d = 4.$$

On a donc quatre systèmes réduits (b_1, c_1) et quatre substitutions réduites

$$S_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & c & -1 \end{vmatrix}, \qquad S'_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & c & -1 \end{vmatrix},$$

$$S''_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & c & -1 \end{vmatrix}, \qquad S'''_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & c & -1 \end{vmatrix}.$$

VII. — Substitutions elliptiques.

Nous allons chercher dans ce paragraphe quelle est la condition pour qu'une forme quadratique admette une substitution semblable elliptique, et d'abord quelles sont les formes qui ne sont pas altérées par les huit substitutions réduites S_1, S'_1, S_2, S_3, S'_3, S'_3, S_4 et S'_4 définies dans le paragraphe précédent.

On a entre ces diverses substitutions les relations suivantes

$$S_1^2 = S_4, \qquad S_1'^2 = S'_4, \qquad S_4^2 = 1, \qquad S_4'^2 = 1, \qquad S_2^2 = S_3,$$
$$S_2^3 = S_4, \qquad S_3^3 = 1, \qquad S_3'^3 = 1, \qquad S_3''^3 = 1 \qquad S_2^6 = 1.$$

Cela posé, nous résoudrons successivement les problèmes suivants :

1° *Formes inaltérées par* S_4. — Ce sont les formes

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + A''z^2;$$

2° *Formes inaltérées par* S'_4. — Ce sont les formes

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + A''z^2 - (A' + B)xy - (A'' + B)xz.$$

où l'on doit avoir

$$A' \equiv A'' \equiv B \pmod 2.$$

3° *Formes inaltérées par* S_1 *et par conséquent par* S_4. — Ce sont les formes

$$Ax^2 + A'(y^2 + z^2).$$

4° *Formes inaltérées par* S'_1 *et par conséquent par* S'_1. — Ce sont les formes

$$Ax + A'(y^2 + z^2 - xy - xz),$$

où A′ doit être pair.

5° *Formes inaltérées par* S_2 *et par conséquent par* S_3 *et par* S_4. — Ce sont les formes

$$Ax^2 + A'(y^2 + yz + z^2),$$

où A′ doit être pair.

Il n'y a d'ailleurs pas d'autre forme inaltérée par S_3.

6° *Formes inaltérées par* S'_3. — Ce sont les formes

$$Ax^2 + A'(y^2 + yz + z^2 - xy - xz),$$

où A′ est pair.

7° *Formes inaltérées par* S''_3. — Ce sont les formes

$$Ax^2 + A'(y^2 + yz + z^2 - 2xy - 2xz),$$

où A′ est pair.

Nous allons chercher maintenant si une forme quadratique donnée admet une substitution elliptique; pour cela, il faut évidemment et il suffit qu'elle soit équivalente à l'une des sept formes que je viens d'énumérer.

Je dis d'abord qu'on pourra reconnaître s'il en est ainsi par un nombre limité d'essais.

En effet, prenons d'abord la première forme

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + A''z^2.$$

Elle a pour déterminant

$$A(A'A'' - B^2).$$

On décomposera donc le discriminant Δ de la forme donnée en deux facteurs

$$\Delta = AD,$$

ce qui ne peut se faire que d'un nombre limité de manières. On con-

struira ensuite une forme binaire *réduite*

$$A'y^2 + 2Byz + A''z^2$$

de déterminant D, ce qui ne peut se faire encore que d'un nombre limité de manières. On n'a plus ensuite qu'à examiner si la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + A''z^2,$$

ainsi construite, est équivalente à la forme donnée.

La même méthode s'applique sans changement aux troisième et cinquième formes

$$Ax^2 + A'(y^2 + z^2) \quad \text{et} \quad Ax^2 + A'(y^2 + yz + z^2).$$

Mais le nombre des essais est encore plus limité; le déterminant de la troisième forme est égal à AA'^2 et celui de la troisième à $3AB^2$ (en posant $A' = 2B$), de sorte qu'une forme ne peut admettre une substitution semblable équivalente à S_2 que si son discriminant est divisible par 3.

En ce qui concerne la seconde forme

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + A''z^2 - (A' + B)xy - (A'' + B)xz,$$

que l'on peut écrire

$$(1) \quad Ax^2 - (2B'' + B)y^2 + 2Byz - (2B' + B)z^2 + 2B''xy + 2B'xz,$$

le nombre des essais est encore limité. En effet, son déterminant s'écrit

$$(2A + B' + B'')(2B'B'' + BB' + BB'').$$

On décomposera donc le déterminant Δ en deux facteurs

$$\Delta = CD.$$

Alors 2D désigne le déterminant de la forme binaire

$$-(2B' + B)y^2 + 2Byz - (2B' + B)z^2.$$

Ces formes binaires, qu'on peut être conduit à essayer, se répartissent donc en un nombre fini de classes.

Si nous faisons subir à la forme (1) une transformation linéaire de déterminant 2, en posant

$$y = y_1 + x_1, \qquad z = z_1 + x_1, \qquad x = 2x_1,$$

elle deviendra

$$(2) \quad (4A + 2B' + 2B'')x_1^2 - (2B'' + B)y_1^2 + 2B + y_1 z_1 - (2B' + B)z_1^2.$$

On peut, de plus, supposer que la forme binaire

$$(3) \qquad (2B'' + B)y^2 - 2Byz + (2B' + B)z^2$$

a été réduite autant que possible par une substitution ne portant que sur y et z.

Si B est pair, on peut appliquer à cette forme binaire une substitution linéaire quelconque sans faire cesser la particularité qui la caractérise, à savoir que les coefficients de y^2, de z^2 et de $2yz$ sont de même parité.

Nous pouvons donc toujours supposer que cette forme est réduite au sens ordinaire du mot, c'est-à-dire, si nous la supposons définie, que l'on a

$$|\,2B\,| < |\,2B'' + B\,| < |\,2B' + B\,|.$$

On ne pourra donc former qu'un nombre fini de formes (2) et, par conséquent, qu'un nombre fini de formes (1) satisfaisant à la fois aux conditions

$$\Delta = (2A + B' + B'')(2B'B'' + BB' + BB''),$$

$$B \equiv 0 \pmod 2, \qquad |\,2B\,| < |\,2B'' + B\,| < |\,2B' + B\,|.$$

On n'aura donc qu'un nombre limité d'essais à faire pour reconnaître si l'une de ces formes est équivalente à la forme donnée.

Supposons maintenant que B soit impair. On ne peut pas appliquer à notre forme binaire

$$(3) \qquad (2B'' + B)y^2 - 2Byz + (2B' + B)z^2$$

une substitution linéaire quelconque sans que les trois coefficients de y^2, de $2yz$ et de z^2 cessent d'être tous trois impairs. Pour qu'une substitution

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

ne fasse pas cesser cette particularité, il faut que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (\text{mod } 2).$$

Les substitutions qui satisfont à l'une de ces deux conditions forment un groupe G qui est un sous-groupe à congruences du groupe arithmétique.

Nous n'avons donc plus ici le droit de supposer que la forme (3) est réduite au sens ordinaire du mot, c'est-à-dire par rapport au groupe arithmétique, mais seulement qu'elle est réduite par rapport au groupe G.

Il est aisé de voir que les conditions de réduction s'écrivent alors

$$|B| < |2B'' + B| < |2B' + B|.$$

On ne pourra évidemment trouver qu'un nombre limité de formes (2) ou (1) satisfaisant simultanément aux conditions

$$\Delta = (2A + B' + B'')(2B'B'' + BB' + BB''),$$

$$B \equiv 1 \quad (\text{mod } 2), \qquad |B| < |2B'' + B| < |2B' + B|.$$

On n'aura donc encore qu'un nombre limité d'essais à faire pour reconnaître si l'une de ces formes est équivalente à la forme donnée.

Ce que je viens de dire s'applique sans changement à la forme

$$Ax^2 + A'(y^2 + z^2 - xy - xz)$$

reproductible par S'_1.

Il nous reste à examiner comment on pourra reconnaître si une forme donnée est susceptible d'être reproduite par une substitution homo-

logue à S'_3 ou à S''_3, c'est-à-dire si elle est équivalente à l'une des formes

$$(4)\qquad Ax^2 + 2B(y^2 + yz + z^2 - \beta xy - \beta xz),$$

où $\beta = 1$ ou 2.

J'appellerai d'abord l'attention sur l'effet que produit sur cette forme la substitution suivante de déterminant 3

$$x = 3x_1, \qquad y = y_1 + \beta x_1, \qquad z = z_1 + \beta x_1.$$

La forme devient

$$(9A - 6B\beta^2)x_1^2 + 2B(y_1^2 + y_1 z_1 + z_1^2).$$

Le déterminant de la forme (4) est, d'ailleurs, égal à

$$3AB^2 - 2B^3\beta^2,$$

c'est-à-dire à

$$3AB^2 - 2B^3 \quad \text{ou} \quad 3AB^2 - 8B^3,$$

selon que β est égal à 1 ou à 2.

Il est clair qu'on ne peut trouver que d'un nombre fini de manières deux nombres entiers A et B satisfaisant à l'une des deux conditions

$$3AB^2 - 2B^3 = \Delta \qquad \text{ou} \qquad 3AB^2 - 8B^3 = \Delta.$$

On n'aura donc qu'un nombre limité d'essais à faire pour reconnaître si une forme donnée de déterminant Δ est équivalente à l'une des formes (4).

Ainsi, dans tous les cas possibles, le nombre des essais à faire est limité, et il peut être diminué encore par la considération des ordres et des genres.

Il est clair, d'après ce qui précède et sans qu'il soit nécessaire d'insister, que toutes les formes n'admettront pas de substitution semblable elliptique.

Mais, en revanche, on voit tout de suite qu'une forme quadratique

quelconque F est toujours commensurable avec une forme qui admet une substitution semblable elliptique. Et, en effet, quelle que soit la forme F, on peut toujours trouver une substitution à coefficients commensurables T′, telle que

$$FT' = Ax^2 + By^2 + Cz^2.$$

Cette forme FT′, commensurable avec F, admet la substitution elliptique S_4.

Cherchons maintenant quelles sont les formes qui admettent une des substitutions paraboliques S'_5, S_6, S'_6 S''_6 et S'''_6.

En premier lieu, les seules formes qui sont reproduites par une des quatre substitutions S_6, S'_6, S''_6 et S'''_6 ont leur discriminant nul. Nous devons donc les laisser de côté et ne nous occuper que des formes reproduites par

$$S'_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{vmatrix}.$$

Ces formes s'écriront

$$(5) \qquad Ax^2 + A'y^2 + 2B'xz + 2B''xy$$

avec les conditions

$$Aa^2 + 2B'b + 2B''a = A'a + B'c = 0.$$

Pour qu'une forme quadratique admette une substitution parabolique, il faut et il suffit qu'elle soit équivalente à la forme (5) ou, en d'autres termes, qu'elle soit susceptible de représenter 0, conformément aux conditions du § CCXCIX des *Disquisitiones arithmeticæ*.

Cela est conforme à un résultat déjà obtenu par M. Selling.

VIII. — Résumé.

Nous pouvons maintenant résumer ainsi les résultats encore très incomplets que nous avons obtenus.

Au groupe des substitutions à coefficients entiers qui n'altèrent pas une forme quadratique donnée F correspond toujours un groupe fuchsien qui le détermine entièrement.

Les formes F peuvent d'abord se répartir en quatre catégories :

1° Celles qui n'admettent ni substitutions elliptiques, ni substitutions paraboliques;

2° Celles qui admettent des substitutions elliptiques, mais pas de substitutions paraboliques;

3° Celles qui admettent des substitutions paraboliques, mais pas de substitutions elliptiques;

4° Celles qui admettent à la fois des substitutions elliptiques et paraboliques.

Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, comment un nombre limité d'essais permet de reconnaître à laquelle de ces quatre catégories appartient une forme donnée.

Si la forme F est de la première ou de la deuxième catégorie, son groupe fuchsien principal sera de la première famille; si F est de la troisième catégorie, son groupe fuchsien est de la deuxième famille; si F est de la quatrième catégorie, son groupe fuchsien est de la sixième famille.

Si la forme F est de la première catégorie, le polygone générateur de son groupe fuchsien a $4p$ côtés, les côtés opposés étant conjugués. Les $4p$ sommets forment un seul cycle, et la somme des angles est égale à 2π.

Si F est de la deuxième catégorie, les sommets du polygone générateur peuvent former plusieurs cycles. (Il convient d'ajouter que le plus souvent ils n'en forment qu'un seul et qu'il n'y aura plusieurs cycles que dans des cas exceptionnels.) Pour reconnaître combien ces sommets forment de cycles, on construira les formes

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz$$

(la forme binaire $A'y^2 + A''z^2 + 2Byz$ étant réduite) ou bien encore les formes (1) et (4) du paragraphe précédent. Si la forme F est équivalente à n des formes ainsi construites, les sommets du polygone générateur formeront n cycles.

La somme des angles de l'un quelconque de ces cycles sera égale à π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$. Si F est équivalente à une forme reproductible par S_4 ou S'_4, la somme des angles du cycle correspondant sera π; si F est équivalente à une forme reproductible par S_1 ou S'_1, la somme des angles du cycle correspondant sera $\frac{\pi}{2}$; si F est équivalente à une forme reproductible par S_2, la somme des angles du cycle correspondant sera $\frac{\pi}{3}$; si, enfin, F est équivalente à une forme reproductible par S'_3 ou S'_4, la somme des angles du cycle correspondant sera $\frac{2\pi}{3}$.

Si F est de la troisième catégorie, les sommets du polygone générateur sont tous sur le cercle fondamental, et ils forment un ou plusieurs cycles (en général un seul), dont la somme des angles est nulle.

Si F est de la quatrième catégorie, les sommets du polygone générateur sont les uns sur le cercle fondamental, les autres à l'intérieur, et ils forment plusieurs cycles dont la somme des angles peut être o, π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$.

Nous avons rencontré aussi d'autres propriétés du groupe fuchsien principal d'une forme F. En premier lieu, les multiplicateurs des diverses substitutions devront satisfaire aux conditions exposées au § V. En second lieu, ce groupe fuchsien devra être commensurable avec ses transformés par une infinité de substitutions, correspondant aux substitutions fractionnaires étudiées au § IV.

Il me reste à parler des substitutions gauches.

Dans la théorie des groupes fuchsiens, on décompose le cercle fondamental en une infinité de polygones égaux entre eux au point de vue pseudogéométrique; les angles sont égaux entre eux au sens ordinaire du mot, et les côtés sont égaux à notre point de vue spécial, c'est-à-dire qu'ils ont même L.

Considérons une circonférence coupant orthogonalement le cercle fondamental, et supposons qu'on transforme un de nos polygones R par inversion (par rayons vecteurs réciproques) par rapport à cette circonférence. Nous dirons alors, au point de vue pseudogéométrique, que le polygone R et son transformé R' sont symétriques par rapport à cette circonférence. Ces deux polygones auront mêmes angles et mêmes

côtés (à notre point de vue spécial), mais les éléments homologues seront disposés dans l'ordre inverse.

Si nous considérons ensuite un polygone R″, égal à R′ au point de vue pseudogéométrique, les deux polygones R et R″ auront aussi les éléments homologues égaux, mais disposés dans l'ordre inverse. Nous dirons alors qu'ils sont symétriques en grandeur, mais non en position.

Si la forme F admet une substitution gauche, on peut décomposer le cercle fondamental en une infinité de polygones curvilignes; deux quelconques de ces polygones sont égaux entre eux ou symétriques (en grandeur) au point de vue pseudogéométrique; deux polygones adjacents sont toujours symétriques, et la réunion de ces deux polygones adjacents symétriques constitue le polygone générateur du groupe fuchsien formé en ne considérant que les substitutions droites.

La substitution

$$S_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

peut être à volonté considérée comme droite ou gauche, puisqu'un de ses multiplicateurs est égal à $+1$, et deux à -1.

Nous avons vu que, pour savoir si la forme F est reproductible par une substitution homologue à S_4, il suffit de chercher si elle est équivalente à une forme, telle que

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + A''z^2.$$

Mais deux cas sont à distinguer : ou bien la forme binaire

$$A'y^2 + 2Byz + A''z^2$$

est définie, et alors nous regarderons la substitution S_4 comme droite et elliptique, ou bien cette forme binaire est indéfinie, et alors nous regarderons S_4 comme une substitution gauche.

On comprend ainsi ce qu'on doit entendre quand je dis que F est reproductible par une substitution gauche appartenant à la même classe que S_4. Si cela arrive, le polygone générateur peut se décom-

poser en deux polygones adjacents symétriques l'un de l'autre, non seulement en grandeur, mais encore en position, le côté commun servant d'axe de symétrie.

Les résultats que je viens d'exposer demanderaient évidemment à être complétés. Les propriétés nouvelles des groupes que nous avons étudiés ne suffisent pas pour les déterminer complètement; mais, en en faisant un usage judicieux, on peut notablement simplifier les anciens procédés de calcul qu'on employait autrefois pour former ces groupes.

IX. — Généralisation du théorème d'addition.

Dans ce qui précède, je me suis efforcé de montrer la possibilité d'employer les fonctions fuchsiennes dans des questions d'Arithmétique. L'application inverse de l'Arithmétique à la théorie des fonctions fuchsiennes est au moins aussi féconde.

L'analogie des fonctions fuchsiennes et des fonctions elliptiques est évidente; les premières ne changent pas quand l'argument subit une substitution linéaire appartenant à un certain groupe, de même que les secondes ne changent pas quand l'argument augmente de certaines périodes. Il y a cependant une propriété des fonctions elliptiques qui ne s'étend pas immédiatement aux fonctions fuchsiennes, c'est le théorème d'addition.

Si l'on augmente l'argument d'une transcendante elliptique d'une quantité qui ne soit pas une période, il y a une relation algébrique entre l'ancienne et la nouvelle valeur de la transcendante. Si donc $F(z)$ est une fonction elliptique, il y aura une relation algébrique entre $F(z)$ et $F(z+h)$, h étant une constante.

Voici quelle serait la généralisation la plus naturelle de cette propriété. Soient $F(z)$ une fonction fuchsienne, S une substitution linéaire n'appartenant pas à son groupe. Il devrait y avoir une relation algébrique entre $F(z)$ et $F(z, S)$. (Je désigne par zS, selon l'habitude, ce que devient z quand on applique à cette variable la substitution S.) Il est aisé de voir que cette propriété ne peut subsister pour *toutes* les substitutions fuchsiennes S, c'est-à-dire pour toutes les substitutions linéaires S qui n'altèrent pas le cercle fondamental. D'autre part, il

arrivera, en général, que cette propriété n'appartiendra à aucune substitution fuchsienne; ce n'est donc que pour certaines fonctions fuchsiennes exceptionnelles qu'elle appartiendra à quelques substitutions fuchsiennes.

A ce double point de vue, on peut dire que le théorème d'addition des fonctions elliptiques ne s'étend pas, *en général*, aux fonctions fuchsiennes.

Je vais faire voir toutefois que, pour certaines fonctions fuchsiennes particulières $F(z)$, il existe une infinité de substitutions S, telles que $F(z)$ et $F(z, S)$ soient liées par une relation algébrique. Il est clair que, dans ce cas, ces substitutions S formeront un groupe.

Que faut-il pour qu'il en soit ainsi? Soit G le groupe de la fonction $F(z)$. La fonction $F(z, S)$ sera aussi une fonction fuchsienne, et son groupe sera le transformé de G par la substitution S, c'est-à-dire $S^{-1}GS$. Si les deux groupes G et $S^{-1}GS$ sont commensurables entre eux, leur groupe commun g sera un sous-groupe d'indice fini pour chacun d'eux. Ce sera donc encore un groupe fuchsien. Mais alors on peut regarder $F(z)$ et $F(z, S)$ comme les fonctions fuchsiennes admettant le groupe g. Ces deux transcendantes seront donc liées par une relation algébrique.

D'où la conclusion suivante :

Pour qu'il y ait une relation algébrique entre une fonction fuchsienne $F(z)$ *de groupe* G *et sa transformée* $F(z, S)$ *par la substitution* S, *il faut et il suffit que les deux groupes* G *et* $S^{-1}GS$ *soient commensurables.*

Je citerai d'abord un premier exemple sur lequel je ne m'arrêterai pas. Soient G un groupe fuchsien et g un second groupe fuchsien, sous-groupe du premier; soit $F(z)$ une fonction fuchsienne de groupe g. Soit enfin S une substitution appartenant à G, mais non à g. Je dis qu'il y aura une relation algébrique entre $F(z)$ et $F(z, S)$.

Soit, en effet, $\Phi(z)$ une fonction fuchsienne de groupe G; nous pourrons la regarder aussi comme une fonction de groupe g; elle sera donc liée algébriquement à $F(z)$. Mais nous pourrons de même regarder $\Phi(z)$ comme une fonction fuchsienne de groupe $S^{-1}gS$, puisque

$S^{-1}gS$ est aussi un sous-groupe de G. Donc $\Phi(z)$ sera aussi liée algébriquement à $F(z, S)$. Cela prouve que $F(z)$ et $F(z, S)$ sont liées algébriquement l'une à l'autre.

Les substitutions S forment, dans ce cas, un groupe G qui est discontinu. Aussi ce premier exemple n'offre-t-il pas grand intérêt. Nous le laisserons donc de côté pour ne nous occuper que des cas où les substitutions S, telles que $F(z)$ et $F(z, S)$, soient liées algébriquement, forment un groupe continu.

C'est ce que nous observerons dans un second exemple, à savoir quand $F(z)$ se réduit à la fonction modulaire J. Le groupe de cette fonction se compose alors de toutes les substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

où α, β, γ, δ sont quatre entiers, tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Nous savons qu'il y a une relation algébrique entre $F(z)$ et $F\left(\frac{z}{n}\right)$; c'est cette relation algébrique qui est bien connue sous le nom d'*équation modulaire* dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques.

Vérifions que le groupe G, formé des substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

où α, β, γ, δ sont entiers, est bien commensurable avec son transformé $S^{-1}GS$ par la substitution

$$S = \left(z, \frac{z}{n}\right),$$

où n est entier.

En effet, le groupe $S^{-1}GS$ est formé des substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha z + \frac{\beta}{n}}{\gamma n z + \delta}\right),$$

où α, β, γ, δ sont entiers et tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Le groupe commun g aux deux groupes G et $S^{-1}GS$ est alors formé des substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

où α, β, γ, δ sont des entiers satisfaisant aux conditions

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \qquad \gamma \equiv 0 \pmod{n}.$$

C'est donc, par rapport à G, un sous-groupe à congruences et par conséquent un sous-groupe d'indice fini. C. Q. F. D.

Pour la même raison, on a une relation algébrique entre la fonction modulaire $F(z)$ et $F\left(\frac{pz}{n}\right)$, p et n étant deux entiers premiers entre eux.

Plus généralement, je dis qu'il y aura une relation algébrique entre la fonction modulaire $F(z)$ et $F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$, a, b, c et d étant des entiers quelconques.

Car la substitution

$$S = \left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

où a, b, c, d sont des entiers quelconques, peut toujours être regardée comme la résultante de plusieurs autres de la forme

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) \quad \text{où} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

ou de la forme

$$(z, pz) \quad \text{ou} \quad \left(z, \frac{z}{n}\right).$$

L'ensemble des substitutions S, telles que $F(z)$ et $F(z, S)$ soient liées algébriquement, forme donc un groupe continu.

Jusqu'à présent cet exemple était isolé, mais nous sommes maintenant à même d'en citer une infinité d'autres.

Envisageons une forme quadratique indéfinie F à coefficients entiers et reprenons les dénominations du § II. Considérons le groupe reproductif de F formé de toutes les substitutions à coefficients *quelconques*

qui n'altèrent pas cette forme, et le groupe principal de F formé de toutes les substitutions à coefficients *entiers* qui n'altèrent pas cette forme. A toute substitution du groupe reproductif correspondra une substitution fuchsienne et au groupe principal de F correspondra un groupe fuchsien G qui sera le groupe fuchsien principal de F.

Soit $f(z)$ une des fonctions fuchsiennes engendrées par le groupe G.

J'envisagerai également les substitutions du groupe reproductif qui ont des coefficients *fractionnaires* (ce sont celles que nous avons étudiées dans le § IV), les substitutions fuchsiennes correspondantes et le groupe Γ formé par ces substitutions fuchsiennes et qui sera un groupe *continu*.

Soit S une substitution fractionnaire du groupe reproductif de F; soit s la substitution fuchsienne correspondante appartenant à Γ. En vertu des lemmes II et VI du § III, le groupe principal de F sera commensurable avec son transformé par S.

Donc G sera commensurable avec son transformé par s.

Il y a donc une relation algébrique entre

$$f(z) \quad \text{et} \quad f(z, s),$$

s étant une substitution quelconque du groupe continu Γ.

Les fonctions fuchsiennes arithmétiques jouissent donc, comme la fonction modulaire, de la propriété qui nous occupe. La fonction modulaire n'en est d'ailleurs qu'un cas particulier et on l'obtient en prenant, pour la forme quadratique F,

$$F = 2y^2 - 2xz.$$

Ainsi il y a une propriété que l'on peut regarder comme la généralisation du théorème d'addition, si l'on regarde les fonctions fuchsiennes comme la généralisation des fonctions elliptiques, mais que l'on peut aussi regarder comme la généralisation de la transformation, si l'on regarde les fonctions fuchsiennes comme la généralisation de la fonction modulaire.

Cette propriété n'appartient pas en général à toutes les fonctions fuchsiennes; mais elle appartient aux fonctions fuchsiennes arithmétiques.

Cela peut faire concevoir l'espoir que ces transcendantes arithmétiques rendront, dans la théorie de certaines classes d'équations algébriques, des services analogues à ceux qu'a rendus la fonction modulaire dans l'étude de l'équation du cinquième degré.

Paris, 18 mars 1887.

Sur la caractéristique cinématique d'un système mécanique en mouvement;

Par M. H. LÉAUTE,

Répétiteur de Mécanique à l'École Polytechnique.

Le système mécanique que nous considérons est formé d'un moteur, des outils qu'il actionne, des transmissions qui les réunissent et tous les problèmes pratiques que l'on peut avoir à résoudre sur un tel ensemble reviennent au fond à l'étude du mouvement troublé de ce système.

Il importe, en effet, lorsqu'on se place au point de vue dynamique, le seul qui convienne à la Mécanique appliquée, d'étudier les phénomènes produits par les variations des forces motrices ou résistantes et de laisser de côté, d'une façon complète, l'hypothèse purement théorique du mouvement uniforme. L'équilibre entre la puissance et la résistance est une fiction, admissible au point de vue cinématique et utile pour la détermination du régime moyen; mais elle ne permet de résoudre aucune des questions que soulèvent les applications et ne donne même pas la possibilité de les aborder.

L'étude du mouvement troublé, et surtout celle du mouvement qui succède à une perturbation, a ainsi une importance particulière; c'est elle qui nous a permis de résoudre la question fondamentale de la ré-

gularisation de la vitesse ([1]), et il convient, dans tous les cas, de simplifier cette étude le plus possible en mettant en évidence les éléments principaux dont elle dépend.

Or, quel que soit le problème que l'on se propose de résoudre, qu'il s'agisse d'éviter des oscillations, de maintenir une vitesse, de limiter des efforts, etc., on rencontre un paramètre qui joue le rôle le plus important, qui caractérise et différentie les divers systèmes mécaniques que l'on peut avoir à considérer et qui constitue ainsi pour chacun de ces systèmes une véritable constante spécifique. C'est ce paramètre que nous désignons sous le nom de *caractéristique du système considéré* et dont nous nous proposons, en raison de son importance capitale, de donner ici la définition et la mesure.

I. Considérons une machine ([2]) en mouvement et appliquons-lui à un instant quelconque le théorème des forces vives.

Pour cela, remarquons que l'ensemble du moteur et de l'outil constitue toujours un système à liaisons complètes, et que, dès lors, le mouvement est défini par celui de l'un quelconque des points du mécanisme.

Choisissons alors un des arbres animés d'une rotation continue et définissons la vitesse de la machine par le nombre de tours ν que cet arbre fait par minute.

Il est bien clair que les vitesses linéaires de tous les points sont, à un moment déterminé, proportionnelles à ν et que la force vive totale est, dès lors, proportionnelle à ν^2.

Cette force vive se représente ainsi par $K\nu^2$, K étant un coefficient qui peut, dans certains cas, varier suivant la position relative des diverses pièces, mais qui reprend toujours la même valeur quand la machine revient à la même position.

Ces variations périodiques de K, dues aux pièces animées d'un mou-

---

([1]) *Mémoire sur les oscillations à longues périodes dans les machines actionnées par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prévenir ces oscillations.* Gauthier-Villars; 1885.

([2]) Nous ne faisons aucune hypothèse sur la nature du moteur, qui peut être un moteur à vapeur ou un moteur hydraulique.

vement non uniforme, sont d'ailleurs assez restreintes, et c'est le but du volant de réduire leur influence.

En négligeant ces inégalités, toujours de faible amplitude, c'est-à-dire en considérant simplement le mouvement moyen, il est ainsi permis de regarder K comme une constante.

D'autre part, le travail moteur dépend à la fois du poids de fluide p qui traverse le moteur dans l'unité de temps et du rendement ρ. Nous avons établi dans un autre Mémoire [1] que ce travail était proportionnel à chacune de ces deux quantités.

Enfin le travail résistant varie à chaque instant suivant la position relative des diverses pièces, mais, en un un point d'application quelconque d'une résistance, le travail élémentaire est proportionnel au chemin décrit par ce point. Et, comme ces chemins sont eux-mêmes proportionnels à ν, on voit que le travail résistant total est proportionnel à ν, si l'on considère toujours le mouvement moyen.

En somme donc, le théorème des forces vives appliqué à la machine pendant un intervalle de temps dt donne

$$(1) \qquad d\nu^2 = \mathrm{A}p\rho\, dt - \mathrm{B}\nu\, dt,$$

A et B pouvant être regardés comme constantes pour une même valeur de la résistance.

II. L'équation précédente définit le mouvement moyen de la machine pendant un intervalle de temps élémentaire quelconque; appliquons-la à un instant dt de la période qui succède à une perturbation.

Si nous représentons alors par ν_0, p_0, ρ_0 les valeurs de ν, p, ρ correspondant à l'état de régime qui s'établira après cette perturbation, on aura, d'après l'équation (1), puisque la vitesse sera constante,

$$(2) \qquad \mathrm{A}p_0\rho_0 - \mathrm{B}\nu_0 = 0,$$

et l'équation (1) deviendra

$$(3) \qquad d\nu^2 = \mathrm{B}\left(\frac{p}{p_0}\frac{\rho}{\rho_0}\nu_0 - \nu\right)dt.$$

---

[1] *Loc. cit.*, Chap. II, § 1. *Équations du mouvement simultané de la machine et de son vannage.*

Imaginons maintenant que, la machine marchant à la vitesse de régime définie par ν_0, on supprime instantanément l'arrivée du fluide moteur sans modifier les résistances; l'équation du mouvement est donnée par l'équation (1) où l'on fait p égal à zéro, c'est-à-dire par

$$(4) \qquad d\nu^2 = - B\nu\, dt;$$

et, si l'on intègre cette équation depuis le moment où l'arrivée du fluide moteur a été interrompue jusqu'à celui où la vitesse est nulle, on en conclut

$$(5) \qquad \nu_0^2 = B \int_{\nu=n_0}^{\nu=0} \nu\, dt.$$

Mais, si l'on désigne par Λ le nombre de tours effectué par la machine dans la période d'arrêt, on a

$$\Lambda = \int_{\nu=\nu_0}^{\nu=0} \nu\, dt,$$

d'où l'on déduit

$$B = \frac{\nu_0^2}{\Lambda},$$

et l'équation (3) devient

$$(6) \qquad d\nu^2 = \frac{\nu_0^2}{\Lambda}\left(\frac{p}{p_0}\frac{\rho}{\rho_0}\nu_0 - \nu\right) dt$$

ou encore

$$(7) \qquad \frac{d\nu}{dt} = \frac{\nu_0^2}{2\Lambda}\left(\frac{p}{p_0}\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\nu_0}{\nu} - 1\right).$$

Telle est donc l'équation générale du mouvement moyen de la machine.

III. Le paramètre Λ que nous venons de définir est la constante spécifique que nous nous proposons d'étudier et qui caractérise le système mécanique que l'on considère; *c'est le nombre de tours que décrit la machine* (¹) *en vertu de la seule inertie lorsque, étant en*

(¹) Il est entendu qu'il s'agit ici du moteur et des outils qu'il actionne et non du moteur seul.

marche normale, on supprime brusquement l'arrivée du fluide moteur sans modifier les résistances. Nous désignerons cette constante sous le nom de *caractéristique cinématique du système mécanique en mouvement* (1).

La détermination de la valeur de cette caractéristique s'effectue par l'expérience, mais dans la pratique l'arrivée du fluide moteur ne peut pas toujours être supprimée instantanément et il faut tenir alors compte du temps qu'exige la fermeture de l'orifice d'admission; de là, une difficulté pour l'évaluation de Λ; car le nombre de tours que l'on mesure entre le moment où l'on commence à fermer cet orifice et celui où la machine est arrêtée ne représente plus la caractéristique cherchée. Nous allons indiquer comment l'on doit opérer.

Pour cela, nous supposerons qu'à l'aide d'un compteur de tours on ait déterminé d'une part le nombre de tours λ_1 fait par la machine pendant que l'orifice d'admission se fermait; d'autre part, le nombre de tours λ_2 effectués depuis l'instant de la fermeture complète jusqu'à celui de l'arrêt, et nous chercherons la relation qui lie la caractéristique Λ aux deux nombres λ_1 et λ_2.

Dans cette recherche nous admettrons que la vitesse de fermeture de la valve d'admission ou de la vanne est sensiblement constante et que l'opération est faite assez rapidement pour être terminée avant l'arrêt complet de la machine.

---

(1) Cette caractéristique joue un rôle fondamental dans toutes les questions relatives au mouvement du système mécanique; il suffit pour le comprendre de se reporter au résultat suivant, que nous avons établi dans un autre travail au sujet des moteurs hydrauliques (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1er mars 1886).

Si l'on désigne par z la plus grande variation relative de vitesse qui se produit quand la résistance varie brusquement de R_1 à R_2, on a

$$z = \frac{\dfrac{\Lambda}{4A\varepsilon}\left(\dfrac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2}{1 + \dfrac{\Lambda}{4A\varepsilon}\left(\dfrac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2}.$$

Dans cette formule ε représente la vitesse relative du vannage, A est l'ouverture de vanne et les valeurs de A et Λ se rapportent à l'état de régime qui suit la perturbation.

IV. Étudions tout d'abord le mouvement de la machine pendant la période où l'orifice se ferme.

Soit τ_1 la durée de cette période; prenons pour origine du temps le moment où la valve commence à se mouvoir, et désignons par φ le rapport de la quantité p de fluide qui traverse le moteur dans l'unité de temps à l'ouverture $\mathcal{A}$ d'admission, ce rapport étant pris à l'instant t.

La vitesse de fermeture étant supposée constante, l'ouverture de valve, qui diminue proportionnellement au temps, se trouvera réduite au bout du temps t dans le rapport $\frac{\tau_1 - t}{\tau_1}$ et l'on aura, en représentant par p_0, $\mathcal{A}_0$, φ_0 les valeurs des quantités p, $\mathcal{A}$, φ dans l'état de régime qui précède le mouvement de fermeture,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0\left(1 - \frac{t}{\tau_1}\right),$$

d'où

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\mathcal{A}\varphi}{\mathcal{A}_0\varphi_0} = \left(1 - \frac{t}{\tau_1}\right)\frac{\varphi}{\varphi_0},$$

et l'équation (7) du mouvement moyen dans cette première période devient ainsi

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\nu_0^2}{2\Lambda}\left[\left(1 - \frac{t}{\tau_1}\right)\frac{\varphi}{\varphi_0}\,\frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{\nu_0}{\nu} - 1\right]. \tag{8}$$

Une remarque indispensable doit être faite au sujet du facteur $\frac{\varphi}{\varphi_0}\,\frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{\nu_0}{\nu}$ qui figure dans cette équation; ce facteur provient du terme $\frac{p}{p_0}\,\frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{\nu_0}{\nu}$ de l'équation (7); or, ainsi que nous l'avons dit, le travail moteur est proportionnel au produit $p\rho$, et dès lors le terme considéré représente, à un facteur constant près, la pression exercée par le fluide sur le moteur.

Il résulte de là que le facteur $\frac{\varphi}{\varphi_0}\,\frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{\nu_0}{\nu}$ de l'équation (8), d'abord égal à l'unité, ne devient jamais infini, puisque la pression du fluide sur le moteur ne peut jamais dépasser un certain maximum et varie en tout cas d'une manière continue.

On en conclut que l'accélération $\frac{d\nu}{dt}$ donnée par l'équation (8) est nulle au début de la période considérée et est égale à $-\frac{\nu_0^2}{2\Lambda}$ à la fin.

Si l'on différentie alors cette équation, on a

$$(9)\qquad \frac{d^2\nu}{dt^2} = \frac{\nu_0^2}{2\Lambda}\left[\left(1-\frac{t}{\tau_1}\right)\frac{d\,\frac{\varphi\rho\nu_0}{\varphi_0\rho_0\nu}}{d\nu}\frac{d\nu}{dt} - \frac{1}{\tau_1}\frac{\varphi\rho\nu_0}{\varphi_0\rho_0\nu}\right]$$

et l'on voit que $\frac{d^2\nu}{dt^2}$ est égal à $-\frac{1}{\tau_1}\frac{\nu_0^2}{2\Lambda}$ pour t égal à zéro et à $-\frac{1}{\tau_1}\frac{\nu_0^3}{2\Lambda\nu_1}\frac{\varphi_1}{\varphi_0}\frac{\rho_1}{\rho_0}$ pour t égal à τ_1; ν_1, φ_1, ρ_1 désignant les valeurs de ν, φ, ρ au moment où l'admission est complètement fermée.

On a ainsi les valeurs de $\frac{d\nu}{dt}$ et de $\frac{d^2\nu}{dt^2}$ au début et à la fin de la période de fermeture; en appliquant alors à cet intervalle de durée τ_1 la formule de Stirling limitée à ses trois premiers termes et tenant compte de ce que

$$\nu_1 = \nu_0 + \int_0^{\tau_1}\frac{d\nu}{dt}\,dt,$$

on en déduit

$$\nu_1 = \nu_0 + \tau_1\left(\frac{d\nu}{dt}\right)_0 + \frac{\tau_1}{2}\left(\Delta\frac{d\nu}{dt}\right)_0^{\tau_1} - \frac{\tau_1^2}{12}\left(\Delta\frac{d^2\nu}{dt^2}\right)_0^{\tau_1},$$

et comme

$$\left(\Delta\frac{d\nu}{dt}\right)_0^{\tau_1} = -\frac{\nu_0^2}{2\Lambda},$$

$$\left(\Delta\frac{d^2\nu}{dt^2}\right)_0^{\tau_1} = \frac{1}{\tau_1}\frac{\nu_0^2}{2\Lambda}\left(1-\frac{\nu_0}{\nu_1}\frac{\varphi_1\rho_1}{\varphi_0\rho_0}\right),$$

on a

$$(10)\qquad \nu_1 = \nu_0 - \frac{\tau_1}{12}\frac{\nu_0^2}{2\Lambda}\left(7-\frac{\varphi_1\rho_1\nu_0}{\varphi_0\rho_0\nu_1}\right).$$

Le nombre λ_1 de tours effectués pendant cette période du mouvement de fermeture est donné par la relation

$$\lambda_1 = \int_0^{\tau_1}\nu\,dt.$$

qui devient, par la formule de Stirling,

$$(11) \qquad \lambda_1 = \tau_1 \frac{\nu_0 + \nu_1}{2} + \frac{\tau_1^2}{12} \frac{\nu_0^2}{2\Lambda},$$

et l'on a ainsi les deux relations (10) et (11) entre les quatre quantités Λ, λ_1, τ_1 et ν_1.

V. Examinons maintenant la période de durée τ_2, qui s'étend depuis l'instant où l'orifice d'admission est complètement fermé jusqu'à l'arrêt complet; la vitesse ν, égale à ν_1 au début, devient nulle à la fin, et l'équation du mouvement est

$$(12) \qquad \frac{d\nu}{dt} = -\frac{\nu_0^2}{2\Lambda};$$

on en déduit

$$(13) \qquad \nu_1 = -\frac{\nu_0^2}{2\Lambda}\tau_2;$$

mais, d'autre part, on a, pour le nombre de tours λ_2 effectué pendant cette période,

$$(14) \qquad \lambda_2 = \int_0^{\tau_2} \nu\, dt = \frac{\nu_0^2}{2\Lambda}\frac{\tau_2^2}{2},$$

et l'on a ainsi les deux nouvelles relations (13) et (14) qui, rapprochées des équations (10) et (11), fournissent quatre relations entre les six quantités Λ, λ_1, λ_2, τ_1, τ_2 et ν_1.

Dès que l'on connaîtra deux des quatre quantités λ_1, λ_2, τ_1, τ_2, on pourra calculer Λ; il convient donc de choisir ces deux quantités de façon que leur détermination expérimentale soit aisée.

Or, à ce point de vue, il est beaucoup plus facile de mesurer directement les nombres de tours λ_1 et λ_2 que les durées τ_1 et τ_2 des deux périodes correspondantes. A la fin de la seconde, en effet, le mouvement devient très lent, l'instant d'arrêt complet est difficile à saisir, et l'on est exposé à d'importantes erreurs sur la quantité τ_2. Cette difficulté ne se produit pas lorsqu'il s'agit des nombres de tours.

Nous supposerons donc λ_1 et λ_2 connus par l'expérience, et nous dé-

duirons des formules (10), (11), (13), (14) l'expression de la caractéristique Λ en fonction de ces deux quantités.

VI. Le terme $\frac{\varphi_1 \rho_1 v_0}{\varphi_0 \rho_0 v_1}$, qui figure dans l'équation (10), dépend en partie du genre de moteur que l'on a à considérer; mais, dans les cas ordinaires de la pratique, il remplit un ensemble de conditions qui permettent de le déterminer avec une exactitude suffisante, sans qu'il soit nécessaire de spécifier la nature de ce moteur. Ceci résulte des considérations suivantes :

En premier lieu, on peut admettre que la quantité de fluide qui traverse le moteur dans l'unité de temps est fonction simplement de l'ouverture d'admission, et que le débit est proportionnel à cette ouverture; φ devient alors constant et le rapport $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$ est remplacé par l'unité.

D'autre part, dans les conditions normales de marche, le rendement, maximum au début de la première période, s'abaisse à mesure que la vitesse diminue.

Enfin, le rapport $\frac{\varphi \rho}{\varphi_0 \rho_0}$, qui décroît à la fois avec la vitesse et avec l'ouverture d'admission quand celle-ci descend au-dessous d'une certaine limite, devient très petit dans le cas extrême où l'ouverture de valve et la vitesse sont toutes deux très petites.

Or, si l'on considère l'expression $\left(2 - \frac{v}{v_0}\right)\frac{v}{v_0}$, on voit qu'elle est maxima pour v égal à v_0, c'est-à-dire pour la vitesse de régime, qu'elle décroît quand v décroît et qu'elle tend vers zéro quand v tend vers zéro. Elle reproduit dès lors la marche générale du rapport $\frac{\varphi \rho}{\varphi_0 \rho_0}$, et l'on peut poser

$$(15) \qquad \frac{v_0 \rho_1 \varphi_1}{v_1 \rho_0 \varphi_0} = 2 - \frac{v_1}{v_0}.$$

La formule (10) devient alors

$$(16) \qquad v_1 = v_0 - \frac{\tau_1}{12} \frac{v_0^2}{2\Lambda}\left(5 + \frac{v_1}{v_0}\right),$$

d'où l'on tire

$$\tau_1 = 12\nu_0 \frac{1 - \frac{\nu_1}{\nu_0}}{\frac{\nu_0^2}{2\Lambda}\left(5 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\right)},$$

et cette valeur, portée dans l'équation (11), donne

$$\lambda_1 = 24\Lambda \frac{1 - \frac{\nu_1}{\nu_0}}{5 + \frac{\nu_1}{\nu_0}} \left(\frac{1 + \frac{\nu_1}{\nu_0}}{2} + \frac{1 - \frac{\nu_1}{\nu_0}}{5 + \frac{\nu_1}{\nu_0}} \right),$$

ou encore

(17) $$\frac{\lambda_1}{\Lambda} = 12 \frac{7 - 3\frac{\nu_1}{\nu_0} - 3\frac{\nu_1^2}{\nu_0^2} - \frac{\nu_1^3}{\nu_0^3}}{\left(5 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\right)^2}.$$

Mais, d'autre part, on déduit des équations (13) et (14), en éliminant τ_2 entre les deux,

(18) $$\frac{\lambda_2}{\Lambda} = \frac{\nu_1^2}{\nu_0^2}.$$

On a ainsi deux équations qui déterminent les valeurs correspondantes de $\frac{\lambda_1}{\Lambda}$ et $\frac{\lambda_2}{\Lambda}$.

VII. Prenons alors une suite de valeurs pour $\frac{\nu_1}{\nu_0}$ considéré comme variable indépendante; nous pourrons, par les équations (17) et (18), calculer les valeurs correspondantes de $\frac{\lambda_1}{\Lambda}$ et $\frac{\lambda_2}{\Lambda}$; nous en déduirons celles de $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ et de $\frac{\Lambda}{\lambda_1 + \lambda_2}$; nous construirons la courbe qui a pour ordonnées ces deux fractions, et nous pourrons conclure de cette courbe les valeurs de $\frac{\Lambda}{\lambda_1 + \lambda_2}$ correspondant à des valeurs de $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$, variant de dixièmes en dixièmes depuis zéro jusqu'à l'unité.

Nous avons ainsi

(19) $$\Lambda = \Lambda_0(\lambda_1 + \lambda_2),$$

en donnant à Λ_0 les valeurs contenues dans le Tableau suivant, valeurs qui ont été obtenues comme nous venons de le dire :

$\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1,0
Λ_0..........	1	0,95	0,90	0,85	0,79	0,73	0,68	0,62	0,56	0,48	0,43	0,30

On a de la sorte le moyen de calculer la caractéristique Λ dès qu'on a mesuré par l'expérience les nombres de tours λ_1 et λ_2 correspondant à la période dans laquelle l'ouverture d'admission se ferme, et à celle dans laquelle elle est fermée.

VIII. Cette caractéristique Λ a une valeur correspondant à chaque vitesse de régime, et ce qui précède montre le moyen de la déterminer pour un régime donné ou, si l'on veut, pour une résistance donnée; il semblerait dès lors nécessaire de la mesurer pour chacune des résistances que la machine peut avoir à vaincre, mais nous allons voir qu'il est inutile de recourir de nouveau à l'expérience, et qu'il est suffisant, au degré d'approximation dont on a besoin, de déterminer la valeur Λ_m de Λ pour l'état de régime moyen.

En se reportant, en effet, à la définition même de Λ, qui représente le nombre de tours faits par la machine lorsqu'on ferme brusquement la vanne pendant l'état de régime correspondant à la résistance R, il est clair que le mouvement s'arrête lorsque le travail résistant $R\Lambda$ est devenu égal à la force vive $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$; on en conclut

$$(20) \qquad \Lambda = \frac{1}{2}\,\frac{\Sigma mv^2}{R}$$

et, par suite,

$$(21) \qquad \frac{\Lambda}{\Lambda_m} = \frac{\Sigma mv^2}{\Sigma mv_m^2}\,\frac{R_m}{R}.$$

Il reste alors à reconnaître comment varie la force vive des masses en mouvement quand on passe de l'état R_m à l'état R.

Supposons, par exemple, que la résistance diminue, c'est-à-dire que R est inférieur à R_m; la perturbation considérée provient soit du

débrayage d'une machine-outil, soit de la suppression de la résistance que cet outil doit surmonter.

Dans ce dernier cas, la force vive des masses en mouvement ne change pas, $\Sigma m v^2$ est égal à $\Sigma m v_m^2$, et l'on a

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_m} = \frac{R_m}{R}.$$

Mais, en dehors de ce cas, la diminution de résistance qui résulte du débrayage d'un outil entraîne une diminution de force vive correspondant à la force vive que possédait cet outil, et $\frac{1}{2}\Sigma m v^2$ décroît en même temps que R.

Toutefois, la variation de la quantité $\frac{1}{2}\Sigma m v^2$ est moins grande proportionnellement que celle de R, en raison de la force vive que possèdent toujours la transmission générale et le moteur. Dans la plupart des machines, en effet, cette force vive est une fraction importante de la force vive totale, tandis que le travail nécessaire pour entretenir le mouvement du moteur est une fraction relativement faible du travail total dépensé.

Il résulte de là que le rapport $\frac{\Sigma m v^2}{\Sigma m v_m^2}$ est plus petit que l'unité quand R_m est supérieur à R, mais est plus grand que $\frac{R}{R_m}$; on peut dès lors le remplacer par la valeur moyenne $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{R}{R_m}\right)$, et écrire

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_m} = \frac{R_m}{R}\,\frac{1 + \frac{R}{R_m}}{2}. \tag{22}$$

Cette formule, qui donne Λ en fonction de Λ_m, ne comporte pas évidemment une grande approximation, mais elle permet de se rendre compte très simplement des changements qu'apporte dans la marche de la machine une modification du travail effectué, et elle présente à ce titre une réelle utilité pratique.

Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (première Partie);

PAR H. HUGONIOT [1].

---

1. La théorie de la propagation du mouvement dans un fluide indéfini est restée jusqu'à présent bien incomplète. On ne s'est guère occupé que des gaz parfaits, du moins quand on a cherché à étudier le phénomène avec quelque rigueur. De plus, on a introduit dans les équations, que fournit l'Hydrodynamique pour représenter le mouvement de ces corps, des hypothèses déguisées, il est vrai, sous le nom d'*approximations*, mais qui altèrent singulièrement la valeur des résultats que l'on peut en déduire.

L'insuccès des tentatives faites jusqu'à ce jour paraît provenir de ce que les géomètres n'ont cru pouvoir obtenir l'expression de la vitesse de propagation du mouvement qu'au moyen des intégrales des équations, intégrales qui sont restées jusqu'ici inconnues, tout au moins dans leur généralité, et que l'on ne paraît pas près de découvrir.

Je vais montrer, dans ce travail, que l'expression analytique de la vitesse de propagation du mouvement dans un fluide indéfini s'obtient aisément et de la manière la plus générale, par la simple considération des équations de l'Hydrodynamique, sans qu'il soit aucunement besoin de se préoccuper de la forme des intégrales.

Il me suffira, pour cela, de généraliser les principes dont j'ai fait usage dans un travail antérieur [2], consacré du reste, en grande

---

[1] Ce Mémoire posthume, retrouvé dans les papiers laissés par M. Hugoniot nous a été communiqué par M. Léauté.

[2] *Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps, et spécialement dans les gaz parfaits*, présenté à l'Académie des Sciences le 26 octobre 1885.

partie, à l'étude d'un cas particulier du mouvement des fluides, celui où le mouvement s'opère par tranches parallèles, de manière que, dans chaque tranche, la vitesse de tous les points soit la même à chaque instant, et normale au plan de la tranche.

2. Je prendrai pour point de départ, dans cette première Partie, les équations bien connues de l'Hydrodynamique, telles qu'elles ont été établies par Euler. Dans la seconde Partie, je reprendrai la question en partant des équations de Lagrange, qui permettent d'étendre la théorie à des cas où les équations d'Euler deviennent inapplicables.

Rapportant le fluide à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy et Oz, soient, à l'instant t, x, y, z les coordonnées d'un point du fluide u, v, w les composantes de sa vitesse; soient enfin, pour le même point,

ρ la densité;
p la pression;
X, Y, Z les composantes de la force extérieure rapportée à l'unité de masse.

Les composantes X, Y et Z peuvent être des fonctions données de x, y, z et t, mais elles peuvent aussi dépendre de l'état du fluide à l'instant considéré. C'est ce qui arrive, par exemple, quand on tient compte des attractions mutuelles exercées par les diverses molécules. Dans ce qui va suivre, on supposera uniquement que les composantes X, Y et Z sont indépendantes des accélérations; les résultats resteraient encore les mêmes si ces composantes étaient des fonctions des vitesses.

Cela posé, les équations d'Euler sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z},\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z},\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z},\\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &+ \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right.$$

3. Les quatre équations précédentes sont les mêmes pour tous les fluides, c'est-à-dire pour les corps dans lesquels la pression sur un élément est normale à sa surface. Elles renferment cinq fonctions inconnues de x, y, z et t et ne peuvent, par suite, suffire à les déterminer. On doit donc y joindre une cinquième équation, mais celle-ci dépend de la nature du fluide.

Je ne m'occuperai ici que du cas où la conductibilité du corps pour la chaleur peut être négligée. Alors la relation entre la pression et la densité d'un élément de masse donné est toujours la même, et ne dépend que de l'état initial, pourvu toutefois qu'il ne se produise pas de discontinuités, c'est-à-dire que la vitesse ne subisse jamais une variation finie dans un temps infiniment petit. La relation en question n'est autre que celle qui correspond à ce qu'on appelle, en Thermodynamique, la *détente adiabatique*. On supposera, dans ce qui va suivre, que cette relation est la même en tous les points du fluide, ce qui a lieu, par exemple, quand il est homogène et à la même température en tous les points, à l'état initial, et on la représentera par l'équation

$$\rho = F(p), \tag{2}$$

qui devient, quand le fluide est un gaz parfait,

$$\rho = Kp^{\frac{1}{m}}, \tag{3}$$

K désignant une constante, et m le rapport des deux chaleurs spécifiques.

Le nombre des équations est alors égal à celui des fonctions inconnues.

4. Lorsqu'on a voulu appliquer les équations précédentes à l'étude de la propagation du mouvement dans les gaz parfaits, on a supposé nulles les forces extérieures, et l'on a admis que l'expression

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

était la différentielle exacte d'une fonction φ des coordonnées. D'après un théorème bien connu de Lagrange, si cette condition est satisfaite à un instant quelconque, elle l'est encore à tous les instants ultérieurs.

Désignant alors par ρ_0 la densité initiale, et par p_0 la pression initiale, on a

$$p = p_0(1+\gamma)^{-m}, \qquad \rho = \rho_0(1+\gamma)^{-1},$$

γ représentant la dilatation cubique. On déduit alors des équations d'Euler les deux suivantes :

$$\frac{m}{m-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[(1+\gamma)^{-m+1}-1\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] = 0,$$

$$(1+\gamma)^{-1}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Considérant uniquement de petits mouvements qui n'altèrent que très faiblement la densité du fluide, on néglige, dans la première équation, les carrés des vitesses et les puissances de γ supérieures à l'unité; elle devient ainsi

$$\gamma = \frac{\rho_0}{mp_0}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

en posant

$$a^2 = \frac{mp_0}{\rho_0}.$$

Dans la deuxième équation, on néglige γ à côté de l'unité, et les produits tels que $\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\gamma}{\partial x}$ à côté de $\frac{\partial\gamma}{\partial x}$; elle se réduit alors à

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

ou, à cause de la valeur précédemment obtenue pour γ,

$$(4) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right).$$

C'est l'équation dont Poisson a fait usage dans ses recherches [1]. On voit, par ce qui précède, qu'elle n'est établie qu'au moyen d'approximations qui doivent singulièrement dénaturer le phénomène réel,

---

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, t. VII.

et dont quelques-unes seraient bien difficiles à justifier. Elles reviennent toutes, d'ailleurs, à changer les hypothèses faites primitivement sur les propriétés des gaz.

C'est en intégrant l'équation précédente au moyen des intégrales définies que Poisson a étudié la propagation du mouvement dans les gaz. Je montrerai plus loin que, si l'on se borne à rechercher la vitesse de propagation du mouvement, il est bien inutile de déterminer les intégrales de l'équation (4); mais, auparavant, il importe de définir avec précision la *vitesse de propagation*.

3. Lorsqu'un mouvement est régi par un système d'équations aux dérivées partielles, tout système d'intégrales de ces équations représente un mouvement possible. Il faut entendre par là que, si une masse indéfinie du fluide se trouvait, à un moment donné, animée du mouvement représenté, il en serait encore de même à tous les instants ultérieurs. Si l'on considère de même une portion finie de fluide limitée par une surface et animée, à un moment donné, d'un mouvement défini par un système d'intégrales, le mouvement continue toujours à être représenté par les mêmes intégrales, si les conditions imposées à la surface sont compatibles avec ces dernières. C'est ce qui arrive, par exemple, quand la pression extérieure appliquée sur la surface a précisément, en chaque point et à chaque instant, la valeur que fournissent ces intégrales.

Mais, si l'on vient à modifier les conditions imposées à une certaine partie de la surface limite, il faut nécessairement qu'il naisse, dans le voisinage de cette portion de surface, un mouvement différent du premier, qui se développe dans le fluide et s'étend de plus en plus, se substituant en partie au mouvement primitif. Il existe dès lors, à chaque instant, dans la masse fluide, une certaine surface qui sépare les parties de ce fluide animées chacune d'un mouvement différent, et qui se déplace en se déformant avec le temps. On donnera à cette surface le nom de *surface de l'onde*, et l'on dira que le deuxième mouvement *se propage* dans le premier.

Soient S la surface de l'onde à l'instant t; S' la position qu'elle occupe à l'instant $t + dt$. Menant la normale en un point x, y, z de la première surface, et désignant par dn la portion de cette normale

comprise entre S et S′, le rapport $\frac{dn}{dt}$ représente la *vitesse de propagation* du deuxième mouvement dans le premier.

Les définitions qui précèdent généralisent celles que j'ai données dans mon Mémoire déjà cité *Sur la propagation du mouvement dans les corps*. J'ai montré dans ce travail que, pour un gaz renfermé dans un tuyau, par exemple, il ne suffisait pas de juxtaposer deux quelconques des mouvements possibles pour que le phénomène de la propagation se produisît. Il fallait encore que les surfaces représentatives se raccordassent suivant une *caractéristique* commune.

Il en est évidemment de même quand, au lieu du mouvement par tranches parallèles, on considère le mouvement le plus général d'un corps. Si, à un moment donné, deux portions contiguës d'un même corps sont animées chacune d'un mouvement différent, le phénomène qui se passe à la surface de séparation est généralement complexe et a pour conséquence la naissance de nouveaux mouvements représentés par des systèmes d'intégrales différents des premiers.

Il y a propagation quand, à l'instant $t + dt$, le mouvement du corps est encore représenté par les deux systèmes d'intégrales primitifs, la surface de séparation s'étant toutefois déplacée et déformée infiniment peu.

Quand un mouvement peut se propager dans un autre, on dira que les deux mouvements sont *compatibles* entre eux.

6. Dans l'étude qui va suivre, on supposera essentiellement que la continuité n'est pas troublée. Or, lorsqu'un mouvement A se propage dans un mouvement B, un point animé d'abord du mouvement A se trouve instantanément animé du mouvement B au moment où la surface de l'onde vient rencontrer ce point. Aux deux mouvements A et B doivent correspondre les mêmes valeurs des vitesses pour les points qui, à l'instant t, se trouvent sur la surface de l'onde.

7. Avant d'aborder les équations générales de l'Hydrodynamique, on considérera d'abord, pour plus de simplicité, l'équation unique dont Poisson a fait usage,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right). \tag{4}$$

La dilatation cubique est proportionnelle à $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, et les composantes de la vitesse sont respectivement égales à $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Soient φ_1 et φ_2 deux intégrales représentant des mouvements compatibles; posant

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Phi,$$

la fonction Φ satisfait évidemment à l'équation (4), de sorte que l'on a

$$(5) \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right).$$

La continuité dans les vitesses exige que l'on ait, pour tous les points de la surface de l'onde,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0.$$

De plus, il est facile de voir que, si les vitesses n'éprouvent pas de variation brusque, la dilatation ne peut varier brusquement; ainsi, le long de la surface de l'onde, les deux valeurs de la dilatation doivent être les mêmes, de sorte que

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0.$$

Les quatre dérivées partielles de la fonction Φ sont ainsi nulles le long de la surface de l'onde. Si donc λ, μ et ν désignent les cosinus directeurs de la normale en un point de cette surface, on a les trois systèmes d'équations

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\lambda}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}} &= \frac{\mu}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}} = \frac{\nu}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}}, \\ \frac{\lambda}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}} &= \frac{\mu}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}} = \frac{\nu}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}}, \\ \frac{\lambda}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}} &= \frac{\mu}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}} = \frac{\nu}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}}. \end{aligned}\right.$$

L'une quelconque des dérivées partielles de Φ est nulle au point x, y, z de la surface de l'onde qui correspond au point t; elle doit encore être nulle, pour l'instant $t+dt$, au point dont les coordonnées sont

$$x+\lambda\,dn,\quad y+\mu\,dn,\quad z+\nu\,dn,$$

puisque ce point appartient à la surface de l'onde qui correspond au temps $t+dt$. On a les quatre équations

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{dn}{dt}\left(\lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}+\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}+\nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)=0,\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}+\frac{dn}{dt}\left(\lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}+\nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}\right)=0,\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}+\frac{dn}{dt}\left(\lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}+\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}\right)=0,\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}+\frac{dn}{dt}\left(\lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}+\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}+\nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)=0.
\end{aligned}$$

L'élimination des quantités $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}$ donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\left(\frac{dn}{dt}\right)^2\Bigg[&\lambda^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\mu}{\lambda}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\nu}{\lambda}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}\right)\\
&+\mu^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\nu}{\mu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}\right)\\
&+\nu^2\left(\frac{\lambda}{\nu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}+\frac{\mu}{\nu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)\Bigg],
\end{aligned}$$

ou, en tenant compte des équations (6),

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\left(\frac{dn}{dt}\right)^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\left(\frac{dn}{dt}\right)^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right).$$

La comparaison de cette équation avec l'équation (5) exige que l'on ait

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)^2=a^2.$$

La formule qui donne la vitesse du son ou, plus généralement, la vitesse de propagation d'un mouvement dans un autre, se trouve ainsi établie sans qu'il y ait eu lieu de se préoccuper de la forme des intégrales.

8. Je vais maintenant appliquer une méthode analogue aux équations générales de l'Hydrodynamique,

$$(1')\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = X - \dfrac{\partial u}{\partial t} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} - w\dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = Y - \dfrac{\partial v}{\partial t} - u\dfrac{\partial v}{\partial x} - v\dfrac{\partial v}{\partial y} - w\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = Z - \dfrac{\partial w}{\partial t} - u\dfrac{\partial w}{\partial x} - v\dfrac{\partial w}{\partial y} - w\dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \dfrac{F'(p)}{F(p)}\left(\dfrac{\partial p}{\partial t} + u\dfrac{\partial p}{\partial x} + v\dfrac{\partial p}{\partial y} + w\dfrac{\partial p}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

La dernière des équations (1′) est l'équation de continuité où l'on a remplacé ρ par sa valeur $F(p)$.

Soient $u_1, v_1, w_1, \rho_1, p_1$; $u_2, v_2, w_2, \rho_2, p_2$ deux systèmes d'intégrales représentant des mouvements compatibles. Posant

$$u_1 - u_2 = U, \qquad v_1 - v_2 = V, \qquad w_1 - w_2 = W, \qquad p_1 - p_2 = P,$$

la continuité exige que l'on ait, le long de la surface de l'onde,

$$(7)\qquad U = 0, \qquad V = 0, \qquad W = 0.$$

De plus, la vitesse variant d'une manière continue, il faut qu'il en soit de même de la densité; ainsi, le long de la surface de l'onde, on a

$$\rho_1 = \rho_2;$$

et, puisque $\rho = F(p)$, il en résulte

$$(8)\qquad p_1 - p_2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad P = 0,$$

le long de cette surface.

Si donc on substitue, dans l'une quelconque des équations (1′), successivement les deux systèmes d'intégrales, et si l'on attribue aux variables x, y, z et t les valeurs qui correspondent à un point de la surface de l'onde, puis que l'on fasse la différence, les quantités X, Y et Z disparaissent; les fonctions u, v, w, ρ et p prennent des valeurs égales, de sorte qu'on peut se dispenser de les affecter d'indices; on obtient donc les quatre équations

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = -\dfrac{\partial U}{\partial t} - u\dfrac{\partial U}{\partial x} - v\dfrac{\partial U}{\partial y} - w\dfrac{\partial U}{\partial z}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial V}{\partial t} - u\dfrac{\partial V}{\partial x} - v\dfrac{\partial V}{\partial y} - w\dfrac{\partial V}{\partial z}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} = -\dfrac{\partial W}{\partial t} - u\dfrac{\partial W}{\partial x} - v\dfrac{\partial W}{\partial y} - w\dfrac{\partial W}{\partial z}, \\ \dfrac{F'(p)}{F(p)}\left(\dfrac{\partial P}{\partial t} + u\dfrac{\partial P}{\partial x} + v\dfrac{\partial P}{\partial y} + w\dfrac{\partial P}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

qui ont lieu pour chaque point de la surface de l'onde.

9. Désignant, comme précédemment, par λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale en un point de la surface de l'onde, les équations (7) et (8) exigent que l'on ait

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\dfrac{\partial U}{\partial x}} = \dfrac{\mu}{\dfrac{\partial U}{\partial y}} = \dfrac{\nu}{\dfrac{\partial U}{\partial z}}, \\ \dfrac{\lambda}{\dfrac{\partial V}{\partial x}} = \dfrac{\mu}{\dfrac{\partial V}{\partial y}} = \dfrac{\nu}{\dfrac{\partial V}{\partial z}}, \\ \dfrac{\lambda}{\dfrac{\partial W}{\partial x}} = \dfrac{\mu}{\dfrac{\partial W}{\partial y}} = \dfrac{\nu}{\dfrac{\partial W}{\partial z}}, \\ \dfrac{\lambda}{\dfrac{\partial P}{\partial x}} = \dfrac{\mu}{\dfrac{\partial P}{\partial y}} = \dfrac{\nu}{\dfrac{\partial P}{\partial z}}. \end{cases}$$

D'autre part, en différentiant, le long de la normale à la surface de

l'onde, chacune des équations (7) et (8), on obtient

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial t}\left(\lambda\frac{\partial U}{\partial x} + \mu\frac{\partial U}{\partial y} + \nu\frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0,\\ &\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial t}\left(\lambda\frac{\partial V}{\partial x} + \mu\frac{\partial V}{\partial y} + \nu\frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0,\\ &\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial t}\left(\lambda\frac{\partial W}{\partial x} + \mu\frac{\partial W}{\partial y} + \nu\frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0,\\ &\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial t}\left(\lambda\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations (9), (10) et (11) sont au nombre de seize; elles sont d'ailleurs homogènes par rapport aux seize dérivées $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, ... Si donc toutes ces dérivées ne sont pas nulles à la fois, le déterminant doit s'annuler.

En d'autres termes, l'élimination des seize dérivées fournira une équation de condition entre les valeurs des fonctions u, v, w, ρ et p et la vitesse de propagation $\frac{dn}{dt}$, d'où l'on déduira la valeur de cette vitesse de propagation.

10. L'élimination se fait très simplement, en exprimant d'abord toutes les dérivées d'une même fonction au moyen d'une seule d'entre elles, et transportant les valeurs obtenues dans les équations (9).

Les équations (10) donnent d'abord

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\mu}{\lambda}\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\nu}{\lambda}\frac{\partial U}{\partial x};$$

la première des équations (11) donne ensuite

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\lambda}\frac{dn}{dt}\frac{\partial U}{\partial x} = 0;$$

de même pour V, W et P, dont les dérivées partielles s'expriment linéairement en fonction de $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial x}$. Substituant dans les équa-

tions (9), on obtient

$$\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \left[\frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w)\right]\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \left[\frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w)\right]\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\frac{\nu}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \left[\frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w)\right]\frac{\partial W}{\partial x},$$

$$\frac{F'(p)}{F(p)}\left[\frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w\right]\frac{\partial P}{\partial x} = \lambda\frac{\partial U}{\partial x} + \mu\frac{\partial V}{\partial x} + \nu\frac{\partial W}{\partial x}.$$

Multipliant les trois premières équations respectivement par λ, μ, ν et ajoutant, puis divisant la somme par la quatrième équation, on trouve, en remarquant que $\rho = F(p)$,

$$F'(p)\left[\frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu x)\right]^2 = 1.$$

On en déduit, pour la vitesse de propagation $\frac{dn}{dt}$, les deux valeurs suivantes :

$$\frac{dn}{dt} = \lambda u + \mu v + \nu w \pm \sqrt{\frac{1}{F'(p)}}.$$

La quantité $\lambda u + \mu v + \nu w$ n'est autre que la projection de la vitesse au point considéré sur la normale à la surface de l'onde. Représentant par N cette projection et remarquant que

$$\frac{1}{F'(p)} = \frac{dp}{d\rho},$$

la formule précédente peut s'écrire

$$\frac{dn}{dt} = N \pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \tag{12}$$

Il est à remarquer que le second membre de cette équation est déterminé aussitôt que l'un des mouvements est donné, d'où ce théorème d'une remarquable généralité :

La vitesse de propagation d'un mouvement dans un fluide dépend de l'état du fluide, mais elle est indépendante de la nature du mouvement qui se propage, pourvu qu'il ne se produise pas de discontinuité.

11. La formule précédente donne la valeur *absolue* de la vitesse de propagation; elle se trouve rapportée aux axes de coordonnées fixes; les deux valeurs sont différentes suivant que la propagation s'effectue dans le sens de la vitesse normale N ou en sens contraire.

Mais il est plus naturel de rapporter cette vitesse au fluide lui-même, qui doit être regardé comme se déplaçant dans la direction de la normale avec une vitesse N. La vitesse de propagation doit alors être prise égale à

$$\pm\sqrt{\frac{1}{F'(p)}} = \pm\sqrt{\frac{dp}{d\rho}};$$

ses deux valeurs sont alors égales et de signes contraires. L'expression analytique est d'ailleurs la même que celle qui a été obtenue en considérant le mouvement des fluides dans les tuyaux.

La formule générale (12) rend compte d'un fait bien connu des physiciens. Lorsque l'atmosphère est agitée, la vitesse normale du son est augmentée ou diminuée d'une quantité égale à la projection de la vitesse du vent sur la direction de la propagation.

Dans le cas particulier où les forces extérieures sont nulles, le fluide peut évidemment demeurer en repos, de sorte que $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $\rho = \rho_0$, $p = p_0$ constituent un système d'intégrales. Si, dans la formule (12), on attribue à p la valeur p_0, et si l'on fait en outre $N = 0$, on obtient

$$\frac{dn}{dt} = \pm\frac{1}{\sqrt{F'(p_0)}},$$

vitesse de propagation du mouvement dans un fluide en repos. Cette vitesse est indépendante de la nature du mouvement qui se propage, pourvu qu'il ne se produise pas de discontinuités.

12. Les seconds membres des trois premières équations (9) repré-

sentent les composantes de l'accélération relative au point considéré de la surface de l'onde. Or on a, d'après (10),

$$\frac{\lambda}{\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}} = \frac{\mu}{\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}} = \frac{\nu}{\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}},$$

ce qui montre que *l'accélération relative est dirigée suivant la normale à la surface de l'onde.*

Il est bien connu que, si l'on considère un élément de volume du fluide, les quantités

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

représentent les composantes de la vitesse angulaire de rotation de cet élément autour de son axe instantané.

On démontre aisément que, pour un point de la surface de l'onde, la rotation relative est nulle. Il suffit pour cela de faire voir que chacune des quantités

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{\partial W}{\partial U} - \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}$$

s'annule pour tout point de la surface de l'onde.

Or, en multipliant la deuxième des équations (9) par V, la troisième par $-\mu$ et ajoutant, le premier membre s'annule en vertu des équations (10). Quant au second membre il devient, en tenant compte des équations (10) et (11),

$$\left[\frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w)\right]\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right).$$

La vitesse de propagation $\frac{dn}{dt}$ étant différente de $\lambda u + \mu v + \nu w$, il en résulte que l'on doit avoir

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

13. Lorsque le fluide considéré est un gaz parfait, on a

$$\rho = F(p) = K p^{\frac{1}{m}},$$
$$F'(p) = \frac{K}{m} p^{\frac{1}{m}-1} = \frac{\rho}{mp};$$

la vitesse de propagation rapportée au fluide est ainsi représentée par

$$\sqrt{\frac{mp}{\rho}}$$

et par $\sqrt{\frac{mp_0}{\rho_0}}$ lorsque la propagation a lieu dans le repos. La formule ordinaire de la vitesse de propagation se trouve ainsi établie d'une manière entièrement rigoureuse; son expression analytique reste d'ailleurs la même quand on considère la propagation d'un mouvement dans un autre; mais la valeur numérique dépend de la pression et de la densité qui correspondent au mouvement primitif.

14. Quand le fluide considéré est un liquide, la relation entre la pression et la densité se réduit sensiblement à

$$\rho = Ap + B,$$

A et B désignant des constantes. La vitesse de propagation rapportée au fluide est alors égale à

$$\sqrt{\frac{1}{A}};$$

c'est une constante absolue, indépendante non seulement du mouvement qui se propage, mais aussi du mouvement primitif.

15. Malgré son caractère de généralité, la théorie précédente est encore incomplète, car il a fallu supposer que la relation $\rho = F(p)$ était la même pour tous les points du fluide. Il est nécessaire de la

reprendre en regardant la fonction $F(p)$ comme dépendant des coordonnées initiales des molécules. Je montrerai, dans la seconde Partie du Mémoire, comment on parvient à ce résultat, en prenant les équations de l'Hydrodynamique sous la forme qui leur a été donnée par Lagrange.

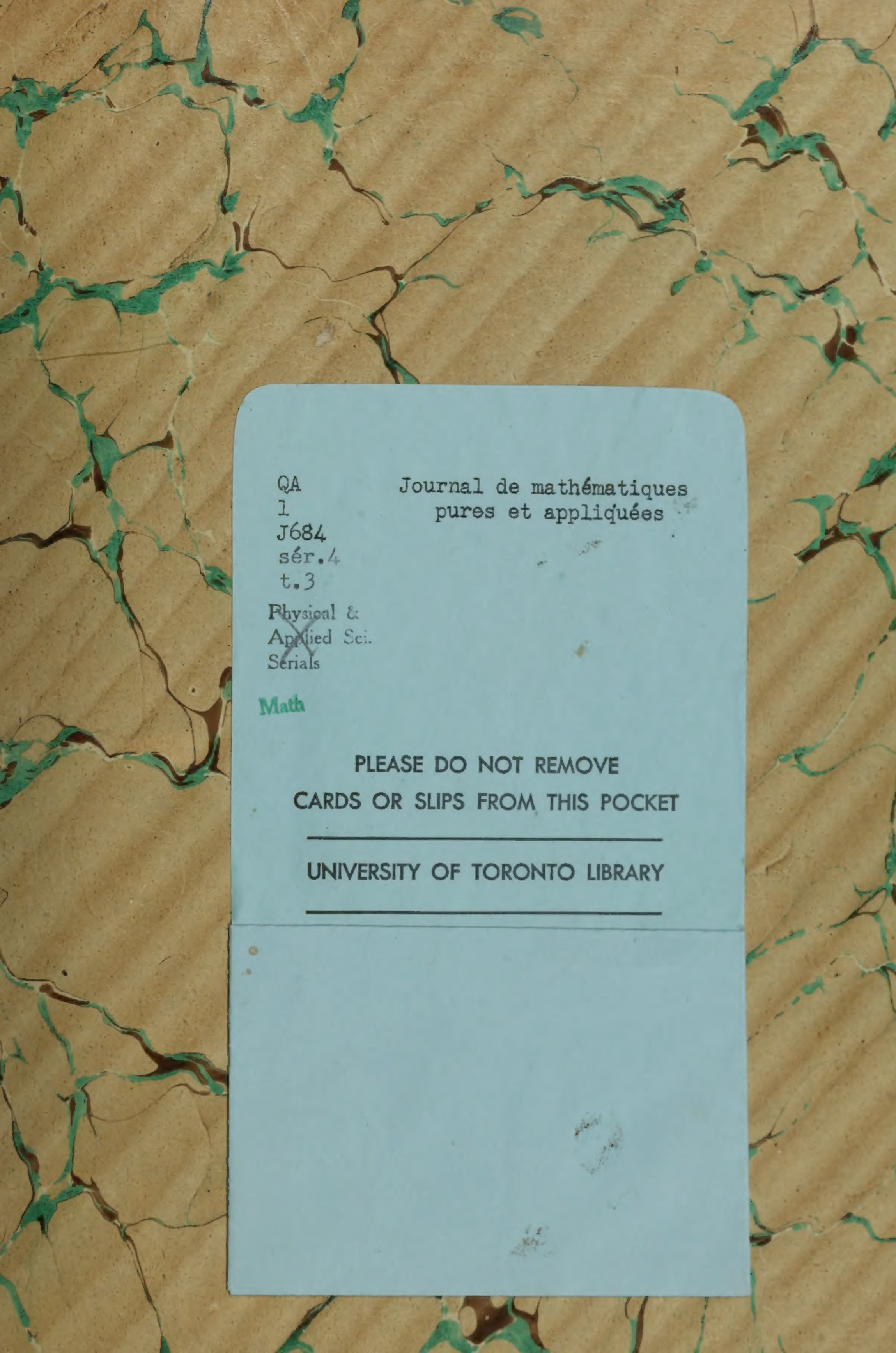
TABLE DES MATIÈRES.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME III.

FIN DU TOME III DE LA QUATRIÈME SÉRIE.

12354 PARIS, IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.




QA
1
J684
sér.4
t.3
Journal de mathématiques
pures et appliquées
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

